

3. DISKRETE VARIANTEN DES HAM-SANDWICH THEOREMS

SATZ 3: (HAM SANDWICH-THEOREM, DISKRET)

$A_1, A_2, \dots, A_d \subseteq \mathbb{R}^d$ endliche Mengen

$\Rightarrow \exists$ Hyperebene H : H halbiert A_i für $i=1, \dots, d$

Dabei: H Hyperebene, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ endlich

" H halbiert A " : $\Leftrightarrow$ Beide durch H definierte offene Halbräume
enthalten $\leq \lfloor \frac{1}{2}|A| \rfloor$ Punkte aus A .

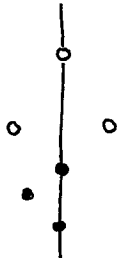
Für $H = \{x \in \mathbb{R}^d : c^T x = \delta\}$: $H_0^- := \{x \in \mathbb{R}^d : c^T x < \delta\}$: $|A \cap H_0^-| \leq \lfloor \frac{1}{2}|A| \rfloor$
 $H_0^+ := \{x \in \mathbb{R}^d : c^T x > \delta\}$: $|A \cap H_0^+| \leq \lfloor \frac{1}{2}|A| \rfloor$

Also: $|A| = 2k+1$ ungerade $\Rightarrow |A \cap H_0^+|, |A \cap H_0^-| \leq k$
 $\Rightarrow |A \cap H| \geq 1$

Bemerkung:

Es wäre vielleicht intuitiver, Punkte auf H halb zu H_0^- und
halb zu H_0^+ dazuzurechnen. Das geht aber i.A. nicht:

z.B.: Zwei Mengen $\subseteq \mathbb{R}^2$,
die nicht in diesem
Sinne halbiert werden
können:



Beweisidee-Satz 3: - Ersetze die Punkte durch kleine Kugeln.
- Wende Ham Sandwich-Theorem (Satz 2) an!

Beweis:

1) Können annehmen, dass alle A_i ungerade viele Punkte enthalten.

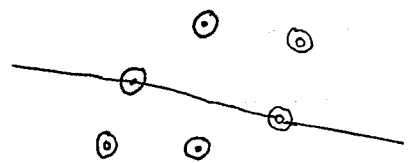
Sonst: Entferne einen Punkt aus jedem A_i mit gerade vielen Punkten.

Halbiere die neuen Mengen und füge Punkte wieder hinzu.

Die gefundene Hyperebene halbiert auch die ursprünglichen Mengen.

2) Nehme zusätzlich an, dass die A_i paarweise disjunkt sind und dass $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_d$ in allgemeiner Lage ist, d.h. jede Hyperebene enthält $\leq d$ Punkte.

$$A_i^\varepsilon := \bigcup_{x \in A_i} B_\varepsilon(x).$$



Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass jede Hyperebene $\leq d$ Kugeln aus $\bigcup_i A_i^\varepsilon$ schneidet.

Dann wende Satz 2 auf die Mengen $A_1^\varepsilon, A_2^\varepsilon, \dots, A_d^\varepsilon$ an:

→ Hyperebene H mit $\text{vol}(H^+ \cap A_i^\varepsilon) = \text{vol}(H^- \cap A_i^\varepsilon) = \frac{1}{2} \text{vol}(A_i^\varepsilon)$
für alle $i=1, \dots, d$.

- Jedes A_i^ε enthält ungerade viele Kugeln.

⇒ H schneidet ≥ 1 Kugel aus jedem A_i^ε .

- H schneidet höchstens d Kugeln.

⇒ H schneidet genau 1 Kugel aus jedem A_i^ε .

- H halbiert jedes A_i^ε .

⇒ Jede auf H liegende Kugel wird von H halbiert.

⇒ Das Zentrum der Kugel liegt auf H .

⇒ H halbiert jedes der A_i .

3) Alle A_i ungerade, aber in beliebiger Lage.

- Für $\delta > 0$: Können alle Punkte um höchstens δ bewegen und eine Punktmenge in allgemeiner Lage erhalten. $\rightarrow A_{i,\delta}$.

- Für $n \in \mathbb{N}$:

Sei H_n Hyperebene, die alle $A_{i,\frac{1}{n}}$ halbiert.

$H_n = \{x \in \mathbb{R}^d : u_n^T x = c_n\}, \|u_n\| = 1. \Rightarrow c_n$ in abgeschlossenem Intervall

$\Rightarrow (u_n, c_n)$ in kompakter Menge.

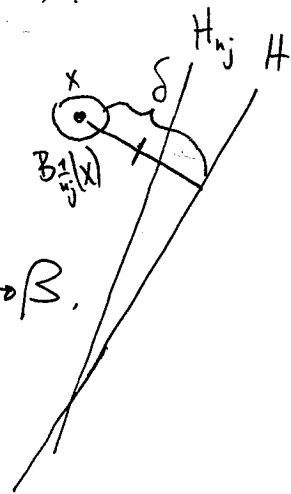
Also: $((u_n, c_n))_{n \in \mathbb{N}}$ hat Häufungspunkt (u, c) .

$$H := \{x \in \mathbb{R}^d : u^T x = c\}, (u_{n_j}, c_{n_j}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} (u, c).$$

- $x \in \mathbb{R}^d$ mit $|u^T x - c| = \delta > 0$.

$\Rightarrow$ Für j ausreichend groß: $|u_{n_j}^T x - c_j| \geq \frac{\delta}{2}$.

D.h.: $x \in H_0^{+/-} \Rightarrow x \in (H_{n_j})_0^{+/-}$ für j ausreichend groß.
und $B_{\frac{1}{n_j}}(x) \subseteq (H_{n_j})_0^{+/-}$



- $|A_i \cap H_0^{+/-}| = k \Rightarrow |A_{i,\frac{1}{n_j}} \cap H_0^{+/-}| \geq k$

$$\Rightarrow k \leq \lfloor \frac{1}{2} |A_i| \rfloor \Rightarrow H \text{ halbiert alle } A_i$$

□

Für Punkte in allgemeiner Lage bekommen wir ein genaueres Resultat:

KOROLLAR 4: $A_1, A_2, \dots, A_d \subseteq \mathbb{R}^d$ paarweise disjunkt

mit $A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_d$ in allgemeiner Lage,

d.h. jede Hyperebene enthält $\leq d$ Pkte.

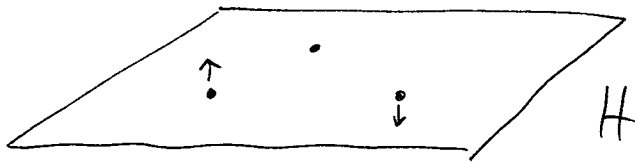
$\Rightarrow \exists$ Hyperebene H , die jedes der A_i halbiert, so dass

$$|H_0^{+/-} \cap A_i| = \lfloor \frac{1}{2} |A_i| \rfloor \text{ und } |H \cap A_i| \leq 1 \text{ für alle } i=1, \dots, d$$

Wissen wir schon wenn alle A_i ungerade viele Pkte haben. Sonst folgt es nicht aus obigem Beweis.

Beweis: Auf H können zu viele Punkte liegen...

Wähle Koordinatensystem so, dass H horizontal: $H = \{x \in \mathbb{R}^d : x_d = 0\}$.



$$B := H \cap (A_1 \cup \dots \cup A_d) \Rightarrow |B| \leq d.$$

Für jedes $b \in B$ entscheide, ob b oberhalb, unterhalb oder auf der neuen Hyperebene liegen soll.

Falls $|B| \neq d$, wähle $d - |B|$ beliebige Punkte auf H mit: $C = B \cup \{\text{diese Punkte}\}$
 $x \in C \rightarrow x_\varepsilon := \begin{cases} x, & \text{falls } x \in B, x \text{ soll bleiben oder } x \notin B, \\ x - \varepsilon e_d, & \text{falls } x \text{ oberhalb } b \text{ liegen soll,} \\ x + \varepsilon e_d, & \text{falls } x \text{ unterhalb } b \text{ liegen soll.} \end{cases}$ affin unabhängig

Für $\{x_\varepsilon : x \in C\}$ existiert eine Hyperebene H_ε mit $x_\varepsilon \in H_\varepsilon$ für alle $x \in C$.

Falls ε klein genug: • $\{x_\varepsilon : x \in C\}$ auch affin unabhängig,
d.h. H_ε eindeutig bestimmt.

• $x \in (A_1 \cup \dots \cup A_d) \setminus B$ liegt so wie vorher

□

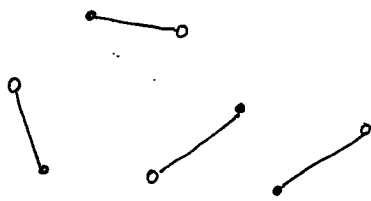
4. ANWENDUNGEN DES HAM SANDWICH-THEOREMS

SATZ 5: $X \subseteq \mathbb{R}^d$ in allgemeiner Lage, $|X| = d \cdot n$,
 $X = A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_d$, $|A_i| = n$ für $i = 1, \dots, d$.

$\Rightarrow X = B_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} B_n$, $|B_i| = d$ mit

- $|B_i \cap A_j| = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, d$,
- $\text{conv}(B_i) \cap \text{conv}(B_j) = \emptyset$ für $i \neq j$.

$d=2$:



Beweis: Induktion über n

$n=1$: ✓

$n>1$: Nach Korollar 4:

Finde Hyperebene H , die alle A_i halbiert.

n gerade: H enthält keine Punkte von X .

$\rightarrow$ Finde $B_1, \dots, B_{\frac{n}{2}}$ in H_0^+
und $B_{\frac{n}{2}+1}, \dots, B_n$ in H_0^- .

n ungerade: H enthält genau einen Punkt aus jedem A_i .

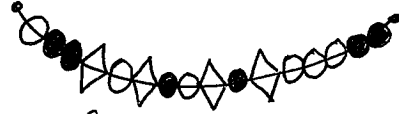
$B_n := |H \cap X|$

Dann finde $B_1, \dots, B_{\frac{n-1}{2}}$ in H_0^+ ,
 $B_{\frac{n+1}{2}}, \dots, B_{n-1}$ in H_0^- .

□

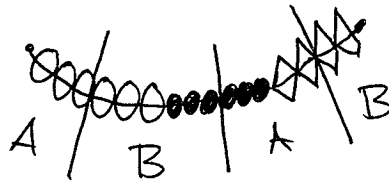
DAS HALSKETTEN-PROBLEM: (NECKLACE PROBLEM)

- 2 Diebe
- 1 Halskette mit d verschiedenen Arten von Edelsteinen, gerade viele von jeder Sorte:



→ Kette soll mit möglichst wenig Schnitten so geteilt werden, dass beide Diebe von jeder Sorte gleich viele Steine bekommen.

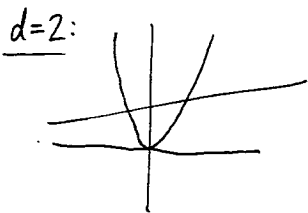
Mindestens d Schnitte nötig:



Satz 6: d Schnitte genügen!

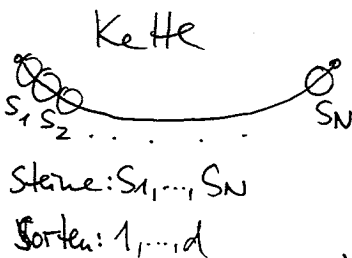
Beweis: Benutzt Momentenkurve: $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$
 $t \mapsto (t, t^2, \dots, t^d)$

Wichtige Eigenschaft: Jede Hyperebene H schneidet $\text{im}(\gamma) := \{\gamma(t) : t \in \mathbb{R}\}$ in höchstens d Punkten.



Wenn $|H \cap \text{im}(\gamma)| = d$, dann wechselt die Kurve in jedem Schnittpunkt die Seite von H .

$H = \{x \in \mathbb{R}^d : u^T x = c\}$: $u^T \gamma(t) = u_1 t^d + u_2 t^{d-1} + \dots + u_d t = c$
 $\rightarrow p(t) = u_1 t^d + \dots + u_d t - c$ hat höchstens d Nullstellen!
 Falls genau d Nullstellen, dann wechselt $p(t)$ an jeder das Vorzeichen.]



→ Wähle $t_1 < t_2 < \dots < t_N$
 und betrachte $\{\gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots, \gamma(t_N)\} =: X$.

$A_i := \{\gamma(t_j) : s_j \text{ ist von der Sorte } i\}$.

X in allg. Lage, A_i 's disjunkt $\xRightarrow{\text{for. 4}} \exists H: |H \cap A_i| = |H \cap A_i| = \frac{1}{2} |A_i|$
 H schneidet $\text{im}(\gamma)$ in höchstens d Punkten. Die 1 Die 2