Kapitel IV Fourier Analyse in endlichen abelschen Gruppen

§ 1 Grundlagen

Sei $(G,+)$ eine endliche abelsche Gruppe

Bsp. 1 a) $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ zyklische Gruppe

b) $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \{a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} :$

$\exists b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : ab = 1 \ (n)\}$.

Gruppe der multiplikativen Inversen von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Theorem 2 (Hauptsatz über endl. abelsche Gruppen)

$\exists m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N} : \quad G \cong \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z}$

($\rightarrow$ Lineare Algebra über $\mathbb{Z}$; Moduln über Hauptidealringen; Smith-Normalform).

Def. 3 a) $(\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} = 1\}, \cdot)$ ist der

<u>Torus</u> von $\mathbb{C}$

b) Eine Abbildung $\chi : G \to T$ mit

$$\chi(x+y) = \chi(x)\,\chi(y) \quad \forall x, y \in G$$

heißt <u>Charakter</u> von G. (χ ist Gruppenhomomorphismus)

<u>Bsp. 4</u> a) $\chi_0(x) = 1 \ \forall x \in G$ heißt der <u>triviale</u> Charakter von G.

b) Für $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist $\chi_a(x) = e^{\frac{2\pi i a x}{n}}$ ein Charakter von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = G$.

Dies sind sogar alle Charakter von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ weil χ_a, $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ist eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^G = \{ f : G \to \mathbb{C} \}$ mit Skalarproduct

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x)\overline{g(x)},$$

weil

$$\langle \chi_a, \chi_b \rangle = \frac{1}{n} \sum_{x=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i a x}{n}} e^{-\frac{2\pi i b x}{n}}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{x=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i (a-b) x}{n}}$$

Setze $q = e^{2\pi i(a-b)/n}$. Dann ist

$$\langle \chi_a, \chi_b \rangle = \frac{1}{n} \sum_{x=0}^{n-1} q^x = \begin{cases} \frac{1}{n} \frac{1-q^n}{1-q} & \text{falls } q \neq 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $q^n = 1$ ist, folgt die Beh. (zusammen mit Satz 6 unten)

<u>Lemma 5</u> Die <u>duale Gruppe</u>

$$\hat{G} = \{ \chi : \chi \text{ ist Charakter von } G \}$$

ist eine abelsche Gruppe mit Multiplikation

$$(\chi \psi)(x) = \chi(x) \psi(x).$$

<u>Bew.:</u> $\longrightarrow$ Aufgabe.

<u>Satz 6</u> Die Charaktere von G sind orthonormal in $\mathbb{C}^G$.

<u>Bew.</u> Einerseits gilt

$$\langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \chi(x) \overline{\chi(x)} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \underbrace{|\chi(x)|^2}_{=1} = 1.$$

Andererseits gilt für einen nicht-trivialen Charakter $\chi \neq \chi_0$: $\sum_{x \in G} \chi(x) = 0$, <u>weil</u>:

Sei $y \in G$ mit $\chi(y) \neq 1$. Dann

$$\chi(y) \sum_{x \in G} \chi(x) = \sum_{x \in G} \chi(y+x) = \sum_{x \in G} \chi(x),$$

also $\sum_{x \in G} \chi(x) = 0$.

Sei $\psi \neq \chi$ ein weiterer Character von G. Dann ist $\chi \psi^{-1} \neq \chi_0$ und somit

$$\sum_{x \in G} (\chi \psi^{-1})(x) = 0 .$$
$$\| $$
$$|G| \langle \chi, \psi \rangle \qquad \boxtimes$$

<u>Satz 7</u> Die Charaktere von G bilden sogar eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^G$.

Das könnte man durch Anwendung von Theorem 2 recht leicht zeigen. Hier machen wir das anders, weniger Algebra, mehr Analysis.

Lemma 8 Sei V ein unitärer Vektorraum endlicher Dimension. Seien $T_1, \dots, T_k$ unitäre Transformationen, die paarweise kommutieren, d.h.

i) $(Tv, Tw) = (v, w) \quad \forall v, w \in V$

ii) $T_i T_j = T_j T_i \quad \forall i, j \in \{1, \dots, k\}$.

Dann lassen sich $T_1, \dots, T_k$ simultan diagonalisieren, d.h. es gibt eine Basis von V, die aus Eigenvektoren von $T_1, \dots, T_k$ besteht.

Bew.: (Induktion nach k)

$k = 1$: Satz über die Spektralzerlegung ($\rightsquigarrow$ Lineare Algebra)

$k > 1$: Der Satz über die Spektralzerlegung, angewendet auf T_k, liefert die Zerlegung

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s},$$

wobei $V_{\lambda_i} = \mathrm{Eig}(T_k, \lambda_i)$. Für $v \in V_{\lambda_i}$ und $j \in [k-1]$ gilt:

$$T_k T_j(v) = T_j T_k(v) = T_j(\lambda_i v) = \lambda_i T_j(v),$$

d.h. $T_j(v) \in V_{\lambda_i}$ für $v \in V_{\lambda_i}$. Nun können wir die Induktionsvor. auf $T_1|_{V_{\lambda_i}}, \dots, T_{k-1}|_{V_{\lambda_i}}$ anwenden, und erhalten eine Basis aus Eigenvektoren von $T_1, \dots, T_{k-1}$ für den UVR V_{λ_i}. Also auch für ganz V. $\boxtimes$

<u>Bew.</u> (von Satz 7)

$V = \mathbb{C}^G$, $\dim V = |G|$.

Für $x \in G$ definiere $T_x : V \to V$ durch

$$(T_x f)(y) = f(x+y), \quad y \in G.$$

Weil G abelsch, gilt $T_x T_y = T_y T_x \quad \forall x, y \in G$.

Außerdem ist T_x unitär:

$$\langle T_x f, T_x g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{z \in G} T_x f(z) \overline{T_x g(z)}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{z \in G} f(x+z) \overline{g(x+z)}$$

$$= \langle f, g \rangle.$$