

Also kann man Lemma 8 anwenden und die Familie T_x , $x \in G$, simultan diagonalisieren.

Sei v_y , $y \in G$, eine solche Basis von V .

Dann gilt $v_y(0) \neq 0$, denn wenn es nicht so wäre:

$$v_y(x) = v_y(x+0) = (T_x v_y)(0) = \lambda_x v_y(0) = 0,$$

wobei λ_x der Eigenwert von T_x von v_y ist, also

$v_y = 0$, was nicht sein kann.

Beh.: $w(x) = \lambda_x = \frac{v_y(x)}{v_y(0)}$ ist ein Charakter von G .

Bew.: Es ist $w(x) \neq 0$ für jedes $x \in G$, was man mit dem obigen Argument eintrifft.

Desweiteren:

$$\begin{aligned} w(a+b) &= \frac{v_y(a+b)}{v_y(0)} = \frac{\lambda_a v_y(b)}{v_y(0)} = \lambda_a \lambda_b \frac{v_y(0)}{v_y(0)} \\ &= \lambda_a \lambda_b = w(a) w(b). \end{aligned}$$

Daraus folgt ($\rightarrow$ Aufgabe), dass $w(x) \in T$. Also ist w ein Charakter. $\square$

Da jeder Basisvektor v_y so einen Charakter von G liefert,

folgt die Behauptung des Satzes. □

Bem.: Der Beweis gibt einen Algorithmus an, um alle Charaktere von G zu bestimmen.

Def. 9 Sei $f \in \mathbb{C}^G$. Die Funktion $\hat{f} \in \mathbb{C}^{\hat{G}}$ definiert

$$\begin{aligned} \text{durch } \hat{f}(\chi) &= \langle f, \chi \rangle \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \overline{\chi(x)} \end{aligned}$$

heißt die (diskrete) Fouriertransformierte von f . Der Koeffizient $\hat{f}(\chi)$ heißt der Fourierkoeffizient von f bei χ .

Satz 10 Seien $f, g \in \mathbb{C}^G$

a) (Fourier - Inversion)

$$f(x) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi) \chi(x)$$

b) (Parseval - Plancherel - Formel)

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi) \overline{\hat{g}(\chi)}.$$

Bew.: a) Da die Charaktere eine Basis von $\mathbb{C}^G$ sind, gibt es Koeffizienten $c_\chi \in \mathbb{C}$ mit

$$f(x) = \sum_{\chi \in \hat{G}} c_\chi \chi(x).$$

Wegen der Orthogonalität folgt:

$$\hat{f}(\chi) = \langle f, \chi \rangle = c_\chi.$$

$$b) \langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \overline{g(x)}$$

$$\stackrel{a)}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \left(\sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi) \chi(x) \right) \overline{\left(\sum_{\psi \in \hat{G}} \hat{g}(\psi) \psi(x) \right)}$$

$$= \sum_{\chi, \psi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi) \overline{\hat{g}(\psi)} \underbrace{\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \chi(x) \overline{\psi(x)}}_{= \langle \chi, \psi \rangle}$$

$$\stackrel{ONB}{=} \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi) \overline{\hat{g}(\chi)}$$

□

Def. 11 Seien $f, g \in \mathbb{C}^G$. Ihre Faltung (Konvolution) ist definiert als $f * g \in \mathbb{C}^G$ mit

$$(f * g)(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} f(y) g(x-y).$$

Satz 12 $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$, d.h.

$$(\widehat{f * g})(\chi) = \widehat{f}(\chi) \widehat{g}(\chi).$$

Bew.:

$$(\widehat{f * g})(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} (f * g)(x) \overline{\chi(x)}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} f(y) g(x-y) \overline{\chi(x)}$$

Substitution
 $x+y$ für x

$$= \frac{1}{|G|^2} \sum_{x \in G} g(x) \overline{\chi(x)} \sum_{y \in G} f(y) \overline{\chi(y)}$$

$$= \widehat{f}(\chi) \widehat{g}(\chi)$$

□

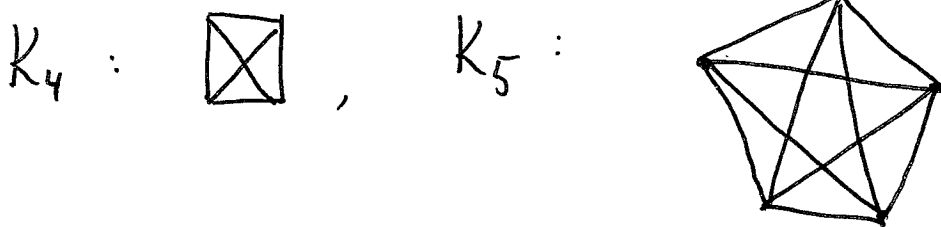
§ 2 Erste Anwendung: Dreieckschnittfamilien von Graphen

1. Vermutung von Simonovits und Sós

Def. 1 Sei $n \in \mathbb{N}$. Definiere den vollständigen Graph auf n Knoten durch

$$K_n = ([n], \{ \{i, j\} : i \neq j, i, j \in [n] \}).$$

Anzahl Kanten von K_n : $\binom{n}{2}$, $E = \binom{[n]}{2}$



Def. 2 Sei $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ eine Familie von Teilgraphen von K_n (codiert durch die Menge der Kanten). $\mathcal{F}$ heißt n -Dreieckschnittfamilie von Graphen, falls

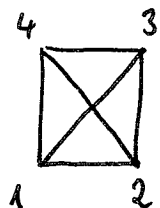
$\forall G, H \in \mathcal{F}$: G und H enthalten ein gemeinsames
Dreieck,

d.h. $\exists e, f, g \in G \cap H$: $|e \cap f| = |f \cap g| = |g \cap e| = 1$.

Bsp. 3 Definiere die fixierte m -Dreieckschnittfamilie

$$\mathcal{F}_0 = \{ G \in 2^E : \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\} \subseteq G \}$$

Dann ist $|\mathcal{F}_0| = \frac{1}{8} 2^{\binom{n}{2}}$.



$$\mathcal{F}_0 = \left\{ \begin{array}{c} \triangle, \quad \square, \quad \times, \quad \square, \\ \square, \quad \square, \quad \square, \quad \square \end{array} \right\}.$$

Vermutung (Simonovits, Sós, 1976)

$\mathcal{F}_0$ ist extremal.

Satz 4 (Ellis, Filmus, Friedgut, 2012)

Sei $\mathcal{F}$ eine m -Dreieckschnittfamilie von Graphen. Dann

gilt $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{F}_0| = \frac{1}{8} 2^{\binom{n}{2}}$.

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\mathcal{F}$ fixiert ist.

[Wir werden nur $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{F}_0|$ zeigen; zweite Aussage ist aber relativ einfach.]