

2. Vorbereitungen

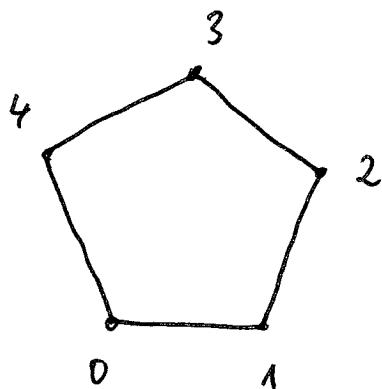
Def. 5 Sei G eine endliche abelsche Gruppe und sei $\Sigma \subseteq G$ mit $\Sigma = -\Sigma$. Definiere den Cayley graph

$$\Gamma = (V, E) = \text{Cayley}(G, \Sigma)$$

durch $V = G$

$$E = \{ \{x, y\} : x - y \in \Sigma \}.$$

Bsp. $G = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\Sigma = \{+1, -1\}$.



Die Nachbarn von x sind $x + \Sigma$.

Lemma 6 Sei $A \in \mathbb{R}^{G \times G}$ die Adjazenzmatrix eines Cayley graphen $\Gamma = \text{Cayley}(G, \Sigma)$. Dann ist für $f \in \mathbb{C}^G$

$$A f = |G| 1_{\Sigma} * f \quad (A \text{ ist ein „Faltungsoperator“}),$$

Wobei $1_{\Sigma} \in \mathbb{C}^G$ die charakteristische Funktion von Σ ist.

Die Eigenvektoren von A sind die Charaktere $\chi \in \hat{G}$ und die zugehörigen Eigenwerte $|G| \hat{1}_\Sigma(\chi)$.

Bew.: Es ist einerseits

$$(Af)(x) = \sum_{y: \{x,y\} \in E} f(y) = \sum_{y \in x + \Sigma} f(y)$$

und andererseits

$$\begin{aligned} (1_\Sigma * f)(x) &= \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} 1_\Sigma(y) f(x-y) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{y \in \Sigma} f(\overbrace{x-y}^z) \quad \left[\begin{array}{l} x-y=z \\ \Leftrightarrow x-z=y \\ x-z \in \Sigma \Leftrightarrow \\ z \in x-\Sigma = x+\Sigma \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{z \in x+\Sigma} f(z), \end{aligned}$$

und die erste Aussage folgt.

Zweite Aussage: $|G|(1_\Sigma * \chi)(x)$

$$\begin{aligned} &= |G| \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} 1_\Sigma(y) \chi(x-y) \\ &= \sum_{y \in G} 1_\Sigma(y) \chi(x) \overline{\chi(y)} \\ &= |G| \hat{1}_\Sigma(\chi) \chi(x). \end{aligned}$$

Korollar 7

a) zu Satz I.1.5 : $\alpha(G) \leq \frac{-|V| \lambda_{\min}}{1 - \lambda_{\min}}$

$$\alpha(\text{Cayley}(G, \Sigma)) \leq \frac{-|G| \lambda_{\min}}{|\Sigma| - \lambda_{\min}},$$

wobei $\lambda_{\min} = |G| \min_{x \in \hat{G}} \hat{1}_{\Sigma}(x)$

und $|\Sigma| = |G| \hat{1}_{\Sigma}(x_0)$.

Also $\alpha(\text{Cayley}(G, \Sigma)) \leq \frac{-|G| \min_x \hat{1}_{\Sigma}(x)}{\hat{1}_{\Sigma}(x_0) - \min_x \hat{1}_{\Sigma}(x)}$

b) zum Beweis von Satz I.1.5

Sei $w \in \mathbb{R}^G$ mit $w(x) = w(-x)$ für alle x und $w(x) = 0$ für $x \notin \Sigma$ (d.h. $\text{supp } w \subseteq \Sigma$).

Sei weiterhin $\hat{w}(x_0) = 1$ und $-1 < \min_x \hat{w}(x) < 0$.

Dann ist

$$\alpha(\text{Cayley}(G, \Sigma)) \leq \frac{-|G| \min_x \hat{w}(x)}{\hat{w}(x_0) - \min_x \hat{w}(x)}.$$

3. Beweis der Vermutung durch Ellis, Filmen,

Friedgut

→ Erweiterung der Strategie von Lovász zum Beweis von EKR.

- Formuliere Dreieckschnittfamilienproblem als Unabhängigkeitsproblem in einem Cayley graph
- Wähle w aus Korollar 7 b) so geschickt, dass obere Schranke scharf ist.

(optimale Wahl von w : Lösen eines linearen Programms)

Betrachte den Cayley graph

$$\Gamma = \text{Cayley}(\mathbb{F}_2^E, \{ \bar{B} \mid B \subseteq K_n, B \text{ ist bipartit} \})$$

D.h. G, F sind adjazent, falls

$$\begin{array}{ccc} G \oplus F & = & G \triangle F = \bar{B} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{für bipartiten} \\ \text{Graph } B. \end{array}$$

$\uparrow$ Addition mod 2 $\uparrow$ sym. Differenz

Lemma 8 n -Dreieckschnittfamilien sind unabhängige Mengen in Γ .

Bew.: $\rightarrow$ Aufgabe

Allerdings gibt es auch unabhängige Mengen in Γ , die nicht n -Dreieckschnittfamilien sind.

Frage Welche $w \in \mathbb{R}^E$ mit $\text{supp } w \subseteq \mathcal{D}'$,
 $\mathcal{D}' = \{ \bar{B} : B \subseteq K_n \text{ bipartit} \}$ sind möglich?

Ab jetzt: Werden klemmungslos Elemente von $\mathbb{F}_2^E$ mit Teilgraphen $G \subseteq K_n$ identifizieren.

Lemma 9 $\chi_G(F) = (-1)^{|F \cap G|}$, $F, G \subseteq K_n$
sind die Charaktere von $(\mathbb{F}_2^E, +)$.

Bew.: χ_G ist Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned}\chi_G(F_1 + F_2) &= (-1)^{|(F_1 + F_2) \cap G|} \stackrel{(*)}{=} (-1)^{|F_1 \cap G|} (-1)^{|F_2 \cap G|} \\ &= \chi_G(F_1) \chi_G(F_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{weil: } |F_1 + F_2 \cap G| &= |F_1 \Delta F_2 \cap G| \\ &= |((F_1 \setminus F_2) \cup (F_2 \setminus F_1)) \cap G|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |F_1 \setminus F_2 \cap G| + |F_2 \setminus F_1 \cap G| \\
&= |F_1 \cap G| + |F_2 \cap G| - 2 |F_1 \cap F_2 \cap G| \\
&= |F_1 \cap G| + |F_2 \cap G| \pmod{2}
\end{aligned}$$

Orthogonalitätsrelation:

Sei $G_1 \neq G_2$. Dann

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{G_1}, \chi_{G_2} \rangle &= \frac{1}{|E|} \sum_{F \in K_n} (-1)^{|G_1 \cap F|} (-1)^{|G_2 \cap F|} \\
&= \frac{1}{|E|} \sum_{F \in K_n} (-1)^{|G_1 + G_2 \cap F|} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

Wird $G_1 + G_2 \neq 0$ und $\chi_{G_1 + G_2}$ Gruppenhomomorphismen. $\square$

Lemma 10 Sei $w \in \mathbb{R}^E$ mit $\text{supp } w \subseteq \mathcal{D}$. Dann

$$\hat{w}(\chi_G) = (-1)^{|G|} \frac{1}{|E|} \sum_{F \in \mathcal{D}} w(\bar{F}) (-1)^{|F \cap G|},$$

wobei $\mathcal{D} = \{B : B \in K_n \text{ bipartit}\}$.

Bew.: $\hat{w}(\chi_G) = \langle w, \overline{\chi_G} \rangle = \langle w, \chi_G \rangle$

$$= \frac{1}{|E|} \sum_{F \in \mathcal{D}} w(F) (-1)^{|F \cap G|}.$$