Es ist $(-1)^{|G|} = (-1)^{|F \cap G \cup \overline{F} \cap G|}$

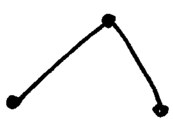
$$= (-1)^{|F \cap G|} \, (-1)^{|\overline{F} \cap G|} .$$

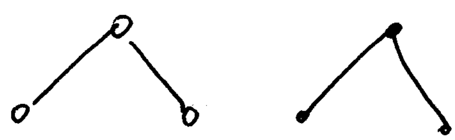
Also

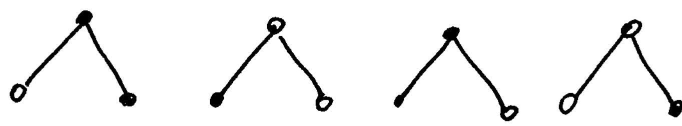
$$\hat{w}(\chi_G) = \frac{1}{|E|} \sum_{F \in \mathcal{D}} w(\overline{F}) \, (-1)^{G} \, (-1)^{|F \cap G|} . \qquad \boxtimes$$

<u>Def. 11</u> Sei $(V_1, V_2)$ eine zufällige Bipartition der Knoten von $K_n$, wobei jeder Knoten mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zu $V_1$ (bzw. zu $V_2$) gehört. Sei $B \subseteq E$ die Menge der Kanten zwischen $V_1$ und $V_2$. Für einen Graph $G \subseteq E$ definiere $q_i(G) = \Pr[\, |G \cap B| = i \,]$.

<u>Bsp. 12</u>

$G =$ 

$q_0(G) = \frac{2}{8}$ 

$q_1(G) = \frac{4}{8}$ 

$q_2(G) = \frac{2}{8}$ 

**Lemma 13** Es gibt ein $w \in \mathbb{R}^E$ mit $\operatorname{supp} w \subseteq \mathcal{D}'$, so dass

$$\hat{w}(\chi_G) = (-1)^{|G|} q_i(G)$$

gilt.

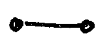
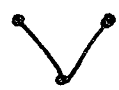
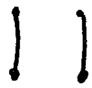
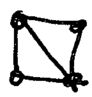
**Bew.:** folgt aus Lemma 10, weil $G \mapsto (-1)^{|F \cap G|}$, $F \in \mathcal{D}$ die Funktionen erzeugen, deren Urbild die Menge der bipartiten Graphen ist. $\boxtimes$

**Bew.:** (von Satz 4)

Wähle $w \in \mathbb{R}^E$ mit $\operatorname{supp} w \subseteq \mathcal{D}'$ und

$$\hat{w}(\chi_G) = (-1)^G \left( q_0(G) - \frac{5}{7} q_1(G) - \frac{1}{7} q_2(G) + \frac{3}{28} q_3(G) \right)$$

entsprechend Lemma 13. Überprüfe, dass

- $\hat{w}(\chi_\emptyset) = 1$,
- $\hat{w}(\chi_G) = -\frac{1}{7}$ für $G =$ , , , $F_4$ (Wald mit 4 Kanten), $K_4^- =$ 

• $\hat{w}(\chi_G) \geq -\frac{1}{7}$ für alle anderen Teilgraphen $G \subseteq K_n$.

Dann liefert Korollar 7 b):

$$\alpha(\mathrm{Cayley}(\mathbb{F}_2^E, \mathcal{D}')) \leq \frac{-2^{\binom{n}{2}}\left(-\frac{1}{7}\right)}{1-\frac{1}{7}}$$

$$= \frac{1}{8}\, 2^{\binom{n}{2}},$$

und die Beh. von Satz 4 folgt. $\boxtimes$

<u>Fragen</u>: 1) Wie kommt man auf

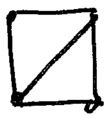
$$\hat{w}(\chi_G) = (-1)^G \left(q_0(G) - \frac{5}{7} q_1(G) - \frac{1}{7} q_2(G) + \frac{3}{28} q_3(G)\right) \;?$$

2) Wie überprüft man $\hat{w}(\chi_G) \geq -\frac{1}{7}$?

<u>zu 1)</u> <u>Ansatz</u>:

$$\hat{w}(\chi_G) = (-1)^G \left(c_0 q_0(G) + c_1 q_1(G) + c_2 q_2(G) + c_3 q_3(G) + c_4 q_4(G)\right)$$

Betrachte Schnittstatistik von kleinen Teilgraphen

| $G$ | $q_0(G)$ | $q_1(G)$ | $q_2(G)$ | $q_3(G)$ | $q_4(G)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\emptyset$ | $1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
|  | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $0$ | $0$ |
|  | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $0$ | $0$ |
|  | $\frac{1}{4}$ | $0$ | $\frac{3}{4}$ | $0$ | $0$ |
| $F_4$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{6}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
|  | $\frac{1}{8}$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ |

[Die Schnittstatistik ist für alle Wälder mit 4 Kanten die gleiche.].

$$\hat{w}(\chi_\emptyset) = 1 \implies c_0 = 1$$

Aufgabe 2.1 $\Rightarrow \hat{w}(\chi_G) = -\frac{1}{7}$ für alle echte Teilgraphen $G \subseteq \Delta$

$$\hat{w}(\chi_{\bullet\!-\!\bullet}) = (-1)\left(\frac{1}{2} + c_1 \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{7}$$

$$\implies c_1 = -\frac{5}{7}$$

$$\hat{w}(\chi_{\wedge}) = \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2} + c_2 \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{7}$$

$$\Longrightarrow \quad c_2 = -\frac{1}{7}$$

$$\hat{w}(X_{F_4}) \geq -\frac{1}{7} \Longrightarrow 4c_3 + c_4 \geq \frac{3}{7}$$

$$\hat{w}(\boxslash) \geq -\frac{1}{7} \Longrightarrow 4c_3 + c_4 \leq \frac{3}{7}$$

$$\Longrightarrow 4c_3 + c_4 = \frac{3}{7}$$

„Glück" gehabt

Setze $c_3 = \frac{3}{28}$ und $c_4 = 0$.

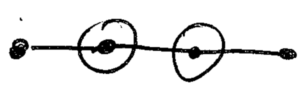
<u>zu 2)</u> Benutze Strukturtheorie von Graphen, um die <u>Erzeugendenfunktion</u>

$$Q_G(X) = \sum_{k \geq 0} q_k(G)\, X^k$$

zu kontrollieren. Hier: Nur Idee. Abschätzungen: Siehe Originalarbeit.

<u>Def. 14</u> Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph.

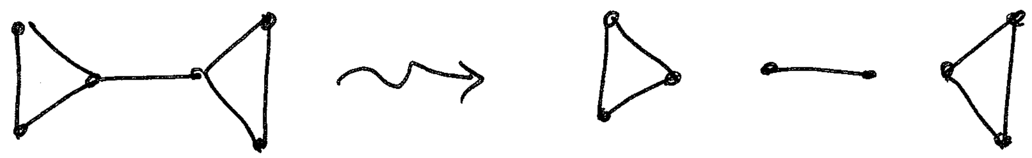
a) Ein Knoten $v \in V$ heißt <u>Schnittknoten</u>, falls $G \setminus v$ unzusammenhängend ist.



b) Ein <u>Block</u> eines Graphen ist ein maximaler zusammenhängender Teilgraph, der keinen Schnittknoten enthält.

c) Eine <u>Brücke</u> von $G$ ist ein Block der Form 

<u>Lemma 15</u> Man kann einen zusammenhängenden Graph kantendisjunkt in Blöcke zerlegen.



Es gilt

$$Q_G(X) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}X\right)^m \prod_{K \in \mathcal{K}} Q_K(X)^{t_K},$$

wobei $m$ die Anzahl der Brücken ist, $\mathcal{K}$ die Isomorphieklassen der Blöcke (ohne Brücken) und $t_K$ die Multiplizität der Klasse $K$.

$Q$  $(X) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}X\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}X^2\right)^2.$

<u>Bew.:</u> → einfach; siehe Originalarbeit.