§ 3 Zweite Anwendung: Arithmetische Progressionen

<u>Def. 1</u> Sei $A \subseteq G$ eine Teilmenge einer endl. abelschen Gruppe $(G,+)$. Sie enthält eine <u>arithmetische Folge (Progression) der Länge k</u> (k-AP), falls es $a, r \in G$ mit

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ \dots,\ a+(k-1)r \in A$$

gibt.

<u>Def. 2</u> Die Erdős-Turán-Konstante von A, $k \geq 1$, ist

$$r_k(A) = \max\{|B| : B \subseteq A,\ B \text{ enthält } \underline{\text{keine}}\ k\text{-AP mit } r \neq 0\}.$$

$r_k(A)$ ist die Unabhängigkeitszahl in dem Hypergraphen

$$H = (A, \{\{a, a+r, \dots, a+(k-1)r\} : a, r \in G,\ r \neq 0\}).$$

<u>Vermutung 3</u> (Erdős-Turán, 1936)

a) $\forall k \geq 3$: $r_k([n]) = o(n)$, wobei $[n] \subseteq \mathbb{Z}$

b) Sei $A \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ mit $\sum_{a \in A} \frac{1}{a} = \infty$. Dann $\forall k \geq 3$:
$r_k(A) = o(|A|)$.

b) $\Rightarrow$ a) : klar.

a) wurde von Szemerédi (1975) in einer spektakulären Arbeit bewiesen.

b) ist noch offen. Falls $A = \{\text{Primzahlen}\}$: Theorem von Green und Tao (2008) .: Auch sehr spektakulär.

<u>Hier</u>: Der Fall $A = [n]$, $k = 3$

<u>Satz 4</u> (Roth, 1953)
Sei $\delta > 0$ und sei n groß genug. Sei $A \subseteq [n]$ mit $|A| = \delta n$. Dann enthält A eine 3-AP. Insbesondere $r_3([n]) = o(n)$.

<u>Bew.</u>: OBdA betrachte anstatt $A \subseteq [n]$ einfach $A \subseteq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($\rightarrow$ Aufgabe). Betrachte die charakteristische Fkt. $1_A : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \{0,1\}$ von A und benutze Fourier Analysis. Charaktere von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ waren nach Bsp. 1.4. b) $\chi_a(x) = e^{\frac{2\pi i a x}{n}}$.

Dann ist $\left(\hat{1}_A(a) = \hat{1}_A(\chi_a) \text{ abkz. Schreibweise} \right)$

$$\hat{1}_A(0) = \hat{1}_A(\chi_0) = \langle 1, 1_A \rangle = \frac{1}{n} |A| = \delta$$

und

$$\sum_{a=0}^{n-1} |\hat{1}_A(a)|^2 = \langle 1_A, 1_A \rangle = \delta$$

Parseval-Plancherel, Satz 1.10. b).

<u>Entscheidende Definition</u>:

$$E := \frac{1}{n^2} \# \text{3-AP in } A \quad (\text{wobei } r = 0 \text{ mitgezählt wird})$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \sum_{r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} 1_A(x)\, 1_A(x+r)\, 1_A(x+2r)$$

Falls A keine 3-AP mit $r \neq 0$ enthalten würde, wäre

$$E = \frac{\delta n}{n^2} = \frac{\delta}{n},$$ d.h. E würde gegen Null gehen.

Werden zeigen, dass $E > \text{Konstante}(\delta) > 0$ ist. Es gilt

$$E = \frac{1}{n^3} \sum_{x', y', z' \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} 1_A(x')\, 1_A(y')\, 1_A(z') \underbrace{\sum_{a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} e^{\frac{-2\pi i a (x'+y'-2z')}{n}}}_{= \begin{cases} 0, & \text{falls } x'+y'-2z' \neq 0 \\ n, & \text{falls } x'+y'-2z' = 0 \end{cases}}$$

[dabei substituieren $x' = x$

$$y' = x + 2r$$

$$z' = x + r \, .$$

Diese Art von Gleichung ist als „Hardy-Littlewood circle method bekannt]

Weiter

$$E = \frac{1}{n^3} \sum_a \sum_{x', y', z'} 1_A(x') \, e^{-2\pi i a x'/n} \cdot 1_A(y') \, e^{-2\pi i a y'/n} \cdot 1_A(z') \, e^{-2\pi i a(-2z')/n}$$

$$= \sum_a \hat{1}_A(a)^2 \, \hat{1}_A(-2a)$$

$$= \underbrace{\hat{1}_A(0)^3}_{I_1} + \underbrace{\sum_{a \neq 0} \hat{1}_A(a)^2 \, \hat{1}_A(-2a)}_{I_2}$$

Es ist $I_1 = \delta^3$.

<u>Fall 1</u>: Der „zufällige" Fall

$$|\hat{1}_A(a)| \leq \delta^2/2 \quad \forall a \neq 0.$$

Dann

$$|I_2| = \Big|\sum_{a\neq 0} \hat{1}_A(a)^2\, \hat{1}_A(-2a)\Big|$$

$$\leq \sum_{a \neq 0} |\hat{1}_A(a)|^2 \cdot \delta^2/2$$

$$\underset{\text{Parseval-Plancherel}}{=} \left(\langle 1_A, 1_A\rangle - |\hat{1}_A(0)|^2\right) \cdot \delta^2/2$$

$$= (\delta - \delta^2)\, \delta^2/2$$

$$\leq \delta^3/2.$$

Also $\quad E = I_1 + I_2 \geq \delta^3 - \delta^3/2 = \delta^3/2.$

<u>Fall 2</u> : Der „strukturierte" Fall

$$\exists\, a \neq 0 : \quad |\hat{1}_A(a)| > \delta^2/2.$$