

Kapitel V Regularität

§ 1 Einführung in die extremale Graphentheorie

Frage Sei H ein Graph. Wie viele Kanten muss ein Graph auf n Knoten wenigstens haben, um die Existenz eines Teilgraphen, der isomorph zu H ist, sicherzustellen.

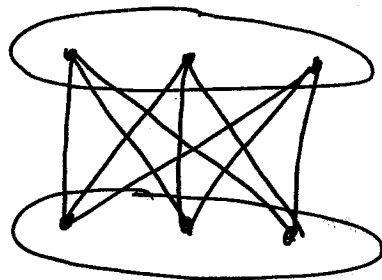
Def. 1 Sei H ein Graph. Definiere

$$ex(n, H) = \max \{ |E| : G = (V, E) \text{ Graph mit } n = |V| \text{ und } H \text{ ist nicht in } G \text{ enthalten} \}$$

Frage Wie sehen G 's aus, die $ex(n, H)$ realisieren?

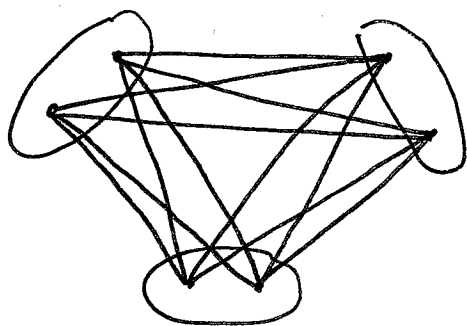
1. Vollständige Graphen $H = K_p$

Bsp. 2 a) $ex(6, K_3) = 9$



bipartit

b) $ex(6, K_4) = 12$



3-partit

Def. 3 Definiere den vollständigen $(p-1)$ -partiten Graph $K_{n_1, \dots, n_{p-1}} = (V, E)$ durch

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_{p-1}, \quad |V_i| = n_i$$

und $\{v, w\} \in E \iff v \in V_i$ und $w \in V_j$ und $i \neq j$.

Der Graph $K_{n_1, \dots, n_{p-1}}$ hat $\sum_{1 \leq i < j \leq p-1} n_i n_j$ viele Kanten.

Lemma 4 a) $K_{n_1, \dots, n_{p-1}}$ enthält keinen K_p .

b) Unter allen vollständigen $(p-1)$ -partiten Graphen enthält

$K_{n_1, \dots, n_{p-1}}$ mit $|n_i - n_j| \leq 1 \quad \forall i, j$ die meisten Kanten

[Diese Graphen heißen Turán-Graphen, sie besitzen

$$t_{p-1}(n) = \sum_{0 \leq i < j < p-1} \left\lfloor \frac{n+i}{p-1} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+j}{p-1} \right\rfloor \text{ viele Knoten.}]$$

Bew.: a) klar, weil $\chi(K_{n_1, \dots, n_{p-1}}) = p$

b) Ang. $m_1 \geq m_2 + 2$. Dann ist

$$\begin{aligned} & \# \text{ Kanten } K_{m_1-1, m_2+1, \dots, n_{p-1}} - \# \text{ Kanten } K_{n_1, \dots, n_{p-1}} \\ &= (m_1-1)(m_2+1) - m_1 m_2 = m_1 - m_2 - 1 \geq 1. \quad \square \end{aligned}$$

Satz 5 (Turán, 1941)

$$\text{ex}(n, K_p) = t_{p-1}(n)$$

und es gilt Gleichheit genau für Turán-Graphen.

┐ Fall n durch $p-1$ teilbar ist, ist

$$\text{└ } t_{p-1}(n) = \binom{p-1}{2} \left(\frac{n}{p-1} \right)^2 = \left(1 - \frac{1}{p-1} \right) \frac{n^2}{2}.$$

Bew.: Sei G ein Graph mit n Knoten, ohne K_p und maximaler Kantenzahl. Werden jetzt zeigen, dass G ein vollständiger $(p-1)$ -partititer Graph ist. Mit Lemma 3 folgt dann die Beh. des Satzes.

Beh.: $\forall u, v, w \in V : \{u, v\} \notin E, \{u, w\} \notin E \Rightarrow \{v, w\} \notin E.$

Bew.: Ang. stimmt nicht und $\{v, w\} \in E.$

Fall 1 $\deg(u) \geq \deg(v), \deg(w)$

Konstruiere Graph G' durch: Zweifache Verdoppelung
von u und Löschen von v, w .



Dann hat G' keinen K_p und

$$\begin{aligned} \# \text{ Kanten } G' &= \# \text{ Kanten } G + 2 \deg(u) - (\deg(v) + \deg(w) - 1) \\ &> \# \text{ Kanten } G. \end{aligned}$$

Fall 2 $\deg(u) < \deg(v)$ oder $\deg(u) < \deg(w)$

o.B.d.A. $\deg(u) < \deg(v)$.

Konstruiere G' durch: Verdoppelung von v , Löschen von u .

Dann hat G' keinen K_p und

$$\begin{aligned} \# \text{ Kanten } G' &= \# \text{ Kanten } G + \deg(v) - \deg(u) \\ &> \# \text{ Kanten } G. \end{aligned}$$

Die Beh. liefert, dass $u \sim v \Leftrightarrow \{u, v\} \notin E$ eine
Äquivalenzrelation ist. Also ist G ein vollständiger $(p-1)$ -
partitür Graph. $\square$