2. Allgemeine Graphen H

Satz 6 (Erdös, Stone, Simonovits, 1946, 1966)
Sei H ein Graph und sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$

$$\left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} - \varepsilon\right)\frac{n^2}{2} \leq ex(n,H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \varepsilon\right)\frac{n^2}{2}.$$

Falls $H = K_p$, dann $\chi(H) = p$ und Satz 6 ist eine approximative Variante von Satz 5.
Falls H bipartit ist, dann ist $\chi(H) = 2$ und $ex(n,H) \leq \varepsilon n^2$ für alle ε.

Bew. (von Satz 6) $\longrightarrow$ § 4.

§ 2 Das Regularitätslemma von Szemerédi

Def. 1 Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $A, B \subseteq V$.

Dann ist

$$E(A,B) = \{ \{a,b\} \in E : a \in A,\ b \in B \}$$

die Menge der Kanten zwischen A und B und

$$d(A,B) = \frac{|E(A,B)|}{|A|\ |B|}$$

ist die Dichte der Kanten zwischen A und B.

Def. 2 a) Das Paar (A,B), $A, B \subseteq V$, heißt ε-regulär, falls für alle $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$ mit $|A'| \geq \varepsilon |A|$ und $|B'| \geq \varepsilon |B|$ gilt:

$$\left| d(A', B') - d(A,B) \right| \leq \varepsilon .$$

b) Eine Partition $V = X_1 \dot\cup \ldots \dot\cup X_k$ heißt ε-regulär, falls

$$\sum_{\substack{(X_i, X_j) \text{ nicht} \\ \varepsilon\text{-regulär}}} \frac{|X_i|\,|X_j|}{n^2} \leq \varepsilon$$

gilt.

Satz 3 (Szemerédis Regularitätslemma, 1978)

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein M, so dass jeder Graph eine ε-reguläre Partition mit höchstens M Klassen besitzt.

Bem.: * sehr wichtiges Lemma in der extremalen Graphentheorie

* werden es verwenden, um das Theorem von Roth über 3-AP (nochmal) zu beweisen (§3) und um Satz 1.6 zu beweisen (§4).

Beweis des Regularitätslemmas

Def. 4 Die quadratische mittlere Dichte einer Partition $V = X_1 \dot\cup \ldots \dot\cup X_k$ ist $\displaystyle\sum_{1 \le i,j \le k} \frac{|X_i|\,|X_j|}{n^2}\, d(X_i, X_j)^2$

Die quadratische mittlere Dichte liegt immer zwischen 0 und 1, weil

$$\sum_{1 \le i,j \le k} \frac{|X_i|\,|X_j|}{n^2} = 1 \quad \text{und} \quad d(X_i, X_j) \in [0,1].$$

Lemma 5 Sei $V = X_1 \cup \ldots \cup X_k$ eine Partition und sei $V = Y_1 \cup \ldots \cup Y_\ell$ eine Verfeinerung von $X_1, \ldots, X_k$. Dann ist die quadratische mittlere Dichte von $Y_1, \ldots, Y_\ell$ mindestens so groß, wie die von $X_1, \ldots, X_k$.

Bew.: Schreibe $X_i = X_{i1} \dot\cup \ldots \dot\cup X_{ia_i}$, wobei $X_{ib_i} = Y_j$ für ein j. Es gilt

$$d(X_i, X_j)^2 = \left(\sum_{s,t} \frac{|X_{is}|\,|X_{jt}|}{|X_i|\,|X_j|} \, d(X_{is}, X_{jt}) \right)^2$$

$$(\text{Cauchy-Schwarz}) \leq \underbrace{\left(\sum_{s,t} \frac{|X_{is}|\,|X_{jt}|}{|X_i|\,|X_j|} \right)}_{=1} \left(\sum_{s,t} \frac{|X_{is}|\,|X_{jt}|}{|X_i|\,|X_j|} \, d(X_{is}, X_{jt})^2 \right)$$

$$= \sum_{s,t} \frac{|X_{is}|\,|X_{jt}|}{|X_i|\,|X_j|} \, d(X_{is}, X_{jt})^2$$

Also

$$\frac{|X_i|\,|X_j|}{n^2} \, d(X_i, X_j)^2 \leq \sum_{s,t} \frac{|X_{is}|\,|X_{jt}|}{n^2} \, d(X_{is}, X_{jt})^2$$

$\boxtimes$

Lemma 6 Sei $G = (V, E)$ mit $V = X \dot\cup Y$ ein bipartiter Graph. Seien $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$, $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_\ell$ Partitionen und $\bigcup_i Z_i$, $\bigcup_i W_i$ Verfeinerungen davon, dann gilt

$$\sum_{i,j} \frac{|X_i|\,|Y_j|}{n^2} d(X_i, Y_j)^2 \le \sum_{i,j} \frac{|Z_i|\,|W_j|}{n^2} d(Z_i, W_j)^2 .$$

Bew.: wie Lemma 5.

Lemma 7 Seien $X, Y \subseteq V$ und $d(X,Y) = \alpha$. Angenommen (X,Y) ist nicht ε-regulär. Dann gibt es eine Partition $X = X_1 \cup X_2$, $Y = Y_1 \cup Y_2$ mit

$$\sum_{1 \le i,j \le 2} \frac{|X_i|\,|Y_j|}{|X|\,|Y|} d(X_i, Y_j)^2 \ge \alpha^2 + \varepsilon^4 .$$

Bew.: Da (X,Y) nicht ε-regulär ist, gibt es $X_1 \subseteq X$, $Y_1 \subseteq Y$ mit $|X_1| \ge \varepsilon |X|$, $|Y_1| \ge \varepsilon |Y|$ und $|d(X_1, Y_1) - \alpha| > \varepsilon$.
Definiere $X_2 = X \setminus X_1$, $Y_2 = Y \setminus Y_1$ und $u(X_i, Y_j) = d(X_i, Y_j) - \alpha$
Dann ist

$$\varepsilon^4 \le \sum_{1 \le i,j \le 2} \frac{|X_i|\,|Y_j|}{|X|\,|Y|} u(X_i, Y_j)^2$$

$$= \sum_{i,j} \frac{|X_i|\,|Y_j|}{|X|\,|Y|} d(X_i, Y_j)^2$$

$$- 2\alpha \underbrace{\sum_{i,j} \frac{|X_i|\,|Y_j|}{|X|\,|Y|} d(X_i, Y_j)}_{= d(X,Y) = \alpha}$$

$$+ \alpha^2 \underbrace{\sum_{i,j} \frac{|X_i|\,|Y_j|}{|X|\,|Y|}}_{= 1}$$

$$= \sum_{i,j} \frac{|X_i|\,|Y_j|}{|X|\,|Y|} d(X_i, Y_j)^2 - \alpha^2 . \qquad \boxtimes$$

<u>Lemma 8</u> Sei $V = X_1 \cup \ldots \cup X_k$ eine Partition von G, die nicht ε-regulär ist. Dann gibt es eine Verfeinerung

$$X_1 = X_{11} \cup \ldots \cup X_{1a_1}, \ \ldots, \ X_k = X_{k1} \cup \ldots \cup X_{ka_k},$$ so dass

jedes a_i höchstens 2^{2k} ist und die quadratische mittlere Dichte der neuen Partition ist mindestens ε^5 größer als die der alten Partition.

<u>Bew.</u> Sei

$$I = \{ (i,j) : (X_i, X_j) \text{ ist nicht } \varepsilon\text{-regulär} \}.$$

Sei α^2 die q.m.D. der alten Partition.