Wende auf jeden Element (i,j) Lemma 7 an.

Dies gibt Partitionen $X_i = A_1^{ij} \cup A_2^{ij}$, $X_j = B_1^{ij} \cup B_2^{ij}$ mit

$$\sum_{1 \le p,q \le 2} \frac{|A_p^{ij}|\,|B_q^{ij}|}{|X_i|\,|X_j|}\, d(A_p^{ij}, B_q^{ij})^2 \ge d(X_i, X_j)^2 + \varepsilon^4 .$$

Für jedes i betrachte die Partition $X_i = X_{i1} \cup \ldots \cup X_{ia_i}$, die man durch gemeinsamen Verfeinern all dieser Partitionen bekommt. Hierfür gilt $|a_i| \le 2^{2k}$. Nach Lemma 5 ist

$$\sum_{p=1}^{a_i} \sum_{q=1}^{a_j} \frac{|X_{ip}|\,|X_{jq}|}{|X_i|\,|X_j|}\, d(X_{ip}, X_{jq})^2 \ge d(X_i, X_j)^2 + \varepsilon^4 .$$

Multiplikation beider Seiten mit $\frac{|X_i|\,|X_j|}{n^2}$ und Summation über alle (i,j) liefert

$$\sum_{1 \le i,j \le k} \sum_{p=1}^{a_i} \sum_{q=1}^{a_j} \frac{|X_{ip}|\,|X_{jq}|}{n^2}\, d(X_{ip}, X_{jq})^2$$

$$\ge \sum_{1 \le i,j \le k} \frac{|X_i|\,|X_j|}{n^2}\, d(X_i, X_j)^2 + \varepsilon^4 \sum_{(i,j) \in I} \frac{|X_i|\,|X_j|}{n^2}$$

$$\ge \alpha^2 + \varepsilon^5 .$$

$\boxtimes$

Bew.: (von Satz 3)

Wir beginnen mit der trivialen Partition in eine Menge. Falls sie ε-regulär ist, sind wir fertig. Falls nicht, gibt es eine Partition bestehend aus höchstens vier Mengen, wobei die q.m.D. um wenigstens ε^5 gestiegen ist. (Lemma 8).

Falls wir in der i-ten Iteration sind und die Partition aus k Klassen besteht und diese Partition nicht ε-regulär ist, gibt es nach Lemma 8 eine Partition mit höchstens $k\,2^{2k} \leq 2^{2^k}$ Klassen, deren q.m.D. um ε^5 größer ist.

Da die q.m.D durch 1 nach oben beschränkt ist, sind wir nach höchstens ε^{-5} Iterationen fertig und haben eine ε-reguläre Partition konstruiert.

$\boxtimes$

§ 3 Erste Anwendung: Der Satz von Roth über 3-AP

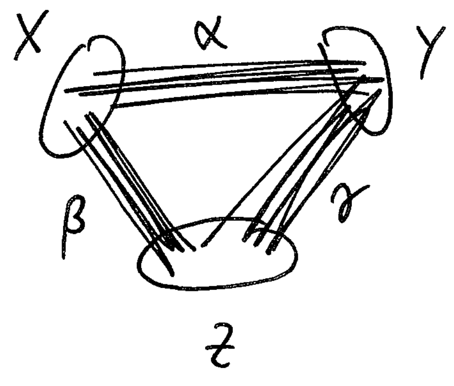
Lemma 1 („triangle counting lemma")

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $X, Y, Z \subseteq V$, so dass (X, Y), (Y, Z), (Z, X) ε-reguläre Paare sind, wobei

$$d(X,Y) = \alpha, \quad d(Y,Z) = \beta, \quad d(Z,X) = \gamma.$$

Falls $\alpha, \beta, \gamma \geq 2\varepsilon$ ist, ist die Anzahl der Dreiecke xyz in G mit $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$ wenigstens

$$(1-2\varepsilon)(\alpha-\varepsilon)(\beta-\varepsilon)(\gamma-\varepsilon)\,|X|\,|Y|\,|Z|.$$



Bew.: Sei $x \in X$ und

$$d_Y(x) = \#\text{ Nachbarn von } x \text{ in } Y$$

$$d_Z(x) = \#\text{ Nachbarn von } x \text{ in } Z.$$

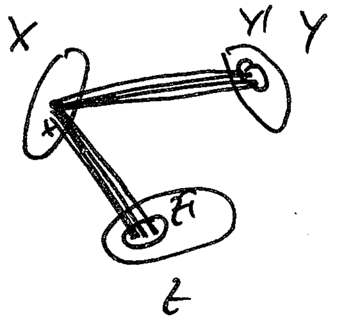
Die Anzahl der $x \in X$ mit $d_Y(x) < (\alpha-\varepsilon)|Y|$ ist höchstens $\varepsilon|X|$.

Weil: Ang. das ist nicht so. Dann gibt es $X' \subseteq X$ mit $|X'| \geq \varepsilon |X|$, so dass $d(X', Y) = \dfrac{|E(X',Y)|}{|X'|\,|Y|} < \alpha - \varepsilon$.

D.h. $|d(X,Y) - d(X',Y)| > \varepsilon$, was der ε-Regularität von (X,Y) widerspricht.

Genauso: Die Anzahl der $x \in X$ mit $d_Z(x) < (\beta-\varepsilon)|Z|$ ist höchstens $\varepsilon|Z|$.

Sei $x \in X$ mit $d_Y(x) \geq (\alpha-\varepsilon)|Y|$ und $d_Z(x) \geq (\beta-\varepsilon)|Z|$



Sei Y' die Nachbarn von x in Y, genauso Z'!

$$\text{Dann ist } |Y'| \geq \overbrace{(\alpha-\varepsilon)}^{\geq\varepsilon}|Y|$$

$$|Z'| \geq \underbrace{(\beta-\varepsilon)}_{\geq\varepsilon}|Z|$$

Also $d(Y',Z') \geq \gamma-\varepsilon$, weil (Y,Z) ε-regulär.

D.h. die Anzahl der Dreiecke xyz, mit $y \in Y$, $z \in Z$ ist wenigstens $(\alpha-\varepsilon)(\beta-\varepsilon)(\gamma-\varepsilon)|Y||Z|$.

Dies über alle $x \in X$ aufsummiert (unter Ausschluss der x mit $d_Y(x) < (\alpha-\varepsilon)|Y|$ oder $d_Z(x) < (\beta-\varepsilon)|Z|$, die höchstens $2\varepsilon|X|$ viele sind), liefert das gewünschte Resultat. $\boxtimes$

Lemma 2 („triangle removal lemma", Ruzsa, Szemerédi, 1978)

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass jeder Graph, der n Knoten hat und höchstens δn^3 Dreiecke besitzt, dreiecksfrei gemacht werden kann, indem man höchstens εn^2 Kanten löscht.

Bew.: Das Regularitätslemma garantiert die Existenz einer $\frac{\varepsilon}{4}$-regulären Partition $V = X_1 \cup \ldots \cup X_M$. Lösche eine Kante $\{x, y\} \in E$, falls

1. $(x,y) \in X_i \times X_j$ und (X_i, X_j) ist nicht $\frac{\varepsilon}{4}$-regulär
2. $(x,y) \in X_i \times X_j$ und $d(X_i, X_j) < \frac{\varepsilon}{2}$
3. $x \in X_i$ mit $|X_i| \leq \frac{\varepsilon}{4M} n$.

Mit 1. löschen wir höchstens $\sum_{(i,j) \in I} |X_i|\,|X_j| \leq \frac{\varepsilon}{4} n^2$ viele Kanten.

Mit 2. löschen wir höchstens $\frac{\varepsilon}{2} n^2$ viele Kanten

Mit 3. löschen wir höchstens $M n \frac{\varepsilon}{4M} n = \frac{\varepsilon}{4} n^2$ viele Kanten.

Also insgesamt höchstens εn^2 viele Kanten.