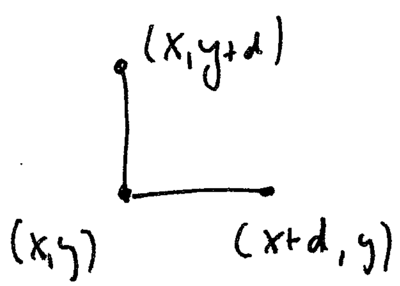
Angenommen wir haben noch immer ein Dreieck xyz mit $x \in X_i$, $y \in X_j$, $z \in X_k$. Dann sind die Paare (X_i, X_j), (X_j, X_k), (X_k, X_i) $\frac{\varepsilon}{4}$-regulär. Außerdem $|X_i|, |X_j|, |X_k| \geq \frac{\varepsilon}{4M} n$. Die Dichte zwischen den Paaren ist wenigstens $\frac{\varepsilon}{2}$. Also haben wir nach dem triangle counting lemma wenigstens

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^3 \left(\frac{\varepsilon}{4M}\right)^3 n^3$$

Dreiecke. Für $0 < \delta < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^3 \left(\frac{\varepsilon}{4M}\right)^3$ haben wir einen Widerspruch. $\boxtimes$

Satz 3 Sei $\delta > 0$. Dann gibt es ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ und jede Teilmenge $A \subseteq [n]^2$ mit wenigstens δn^2 Elementen stets gilt, dass sie Elemente der Form (x,y), $(x+d, y)$, $(x, y+d)$ mit $d > 0$ enthält.



Bew.: Die Menge

$A + A = \{x + y : x \in A, y \in A\}$ ist in $[2n]^2$ enthalten.

Es gibt ein $z \in A+A$, das als $x+y$ in wenigstens

$$\frac{(\delta n^2)^2}{(2n)^2} = \frac{\delta^2 n^2}{4}$$ verschiedene Weisen geschrieben werden

kann. Definiere $A' = A \cap (z-A)$ und $\delta' = \frac{\delta^2}{4}$. Dann

$|A'| \geq \delta' n^2$. Falls A' ein 3-Tupel der Form

$(x,y), (x+d,y), (x,y+d)$ mit $d<0$ enthält, dann

auch $z-A$. Also auch A, aber mit $d>0$. D.h. es genügt

nach einem 3-Tupel mit $d \neq 0$ zu suchen.

Betrachte den tripartiten Graph G mit Knoten $X \cup Y \cup Z$,

$X = Y = [n]$, $Z = [2n]$ und Kanten

$$x \sim y \iff (x,y) \in A \qquad y \sim z \iff (z-y,y) \in A$$

$$x \sim z \iff (x, z-x) \in A$$

Falls es ein Dreieck xyz in G gibt, dann sind

$$(x,y),\ (x, y+(z-x-y)),\ (x+(z-x-y),y) \in A,$$

was ein 3-Tupel mit $d \neq 0$ ist, falls $z \neq x+y$.

Ang. es gibt in G nur Dreiecke xyz mit $z=x+y$.

Davon gibt es höchstens $n^2 = \frac{1}{64n}(4n)^3$ viele.

Nach dem triangle removal lemma (unter der Bedingung, dass n groß genug ist), kann man durch das Löschen von $\frac{\delta}{2} n^2$ Kanten den Graph dreiecksfrei machen.

Jedes Element in A bestimmt aber ein Dreieck mit $z = x+y$, wobei alle Kanten disjunkt sind. ~~Da~~

Da $|A| = \delta n^2$ ist, haben wir einen Widerspruch. $\boxtimes$

<u>Satz 4</u> (Roth)

Für alle $\delta > 0$ gibt es ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ stets gilt: Sei $A \subseteq [n]$ eine Teilmenge mit wenigstens δn Elementen. Dann enthält A eine 3-AP.

<u>Bew.</u>: Definiere $B \subseteq [2n]^2$ durch

$$B = \{(x,y) : x-y \in A\}.$$

Dann $|B| \geq \delta n^2 = \frac{\delta}{4}(2n)^2$. Nach Satz 3 gibt es $d > 0$

mit $(x,y), (x+d,y), (x,y+d) \in B$.

D.h.

$$\underbrace{x-y}_{x'+d} \in A, \quad \underbrace{x+d-y}_{x'+2d} \in A, \quad \underbrace{x-y-d}_{x'} \in A. \qquad \boxtimes$$

* * * * * *

§ 4 Zweite Anwendung: Der Satz von Erdös-Stone-Simonovits

$\longrightarrow$ Seminar nächsten Semester.