Aufgabe 2.2 Sei $1 \leq t \leq k \leq n/2$.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f_t : \mathbb{R}^{\binom{[n]}{t}} \to \mathbb{R}^{\binom{[n]}{t-1}}, \quad f(x)_S = \sum_{T \in \binom{[n]}{t}, S \subseteq T} x_T, \quad S \in \binom{[n]}{t-1},$$

surjektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$g_{t,k} : \mathbb{R}^{\binom{[n]}{t}} \to \mathbb{R}^{\binom{[n]}{k}}, \quad g(x)_U = \sum_{T \in \binom{[n]}{t}, T \subseteq U} x_T, \quad U \in \binom{[n]}{k},$$

injektiv ist.

Hinweise

1. Für b): Warum reicht es zu zeigen, dass $h_{t-1} = g_{t-1,t}$ für $1 \leq t \leq k \leq n/2$ injektiv ist?
2. Wie sehen die Matrix darstellungen von f_t und h_{t-1} bezüglich der Standard-Basen $\{e_M : M \in \binom{[n]}{m}\}$ von $\mathbb{R}^{\binom{[n]}{m}}$ aus? Wie die von $f_t h_{t-1}$ und $h_{t-2} f_{t-1}$?
3. Sei L_{up} die Matrix von $f_t h_{t-1}$ und L_{down} die von $h_{t-2} f_{t-1}$. Was ist $L_{\text{up}} - L_{\text{down}}$?
4. Zeige, dass L_{up} nur positive Eigenwerte hat.

Aufgabe 3.4 Zeigen Sie, dass die chromatische Zahl des $\mathbb{R}^n$ höchstens exponentiell in n wächst.

Hinweise Betrachte folgende Partition des $\mathbb{R}^n$ in Würfel:

$$a \in \mathbb{Z}^n : \quad C_a = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{a_i}{\sqrt{n}} \leq x_i < \frac{a_i + 1}{\sqrt{n}}\}.$$

Alle Punkte innerhalb eines Würfels können dieselbe Farbe bekommen. (Wieso?) Eine zulässige Färbung der Würfel entspricht einer zulässigen Färbung des folgenden (unendlichen) Graphen:

$$G = (\mathbb{Z}^n, E) \quad \text{mit} \quad E = \{\{a, b\} : a, b \in \mathbb{Z}^n, \exists x \in C_a, y \in C_b : \|x - y\| = 1\}.$$

1. Zeige: $\{a, b\} \in E \Rightarrow C_b \subseteq B_3^n(\frac{a}{\sqrt{n}})$.
2. Zeige, dass G d-regulär ist mit $d \leq 14^n$, wenn n ausreichend groß. Hierbei kann verwendet werden:
$$\operatorname{vol}(B_3^n(\frac{a}{\sqrt{n}})) = \begin{cases} \frac{\pi^{n/2} 3^n}{(n/2)!}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{2(\frac{n-1}{2})!(4\pi)^{\frac{n-1}{2}} 3^n}{n!}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$
$$(\frac{k}{3})^k < k! \leq k^k \text{ für } k \geq 3.$$
3. Zeige, dass für einen beliebigen d-regulären Graphen gilt, dass $\chi(G) \leq d + 1$.