Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. A. Gundert
Dr. F. von Heymann

Methoden und Probleme der diskreten Mathematik

Wintersemester 2014/2015

— Aufgabenblatt 9 —

Aufgabe 9.1

a) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein 2-färbbares Mengensystem $\mathcal{F}$ mit $\chi(\mathrm{KG}(\mathcal{F})) \geq n$ an.

b) Zeigen Sie $\mathrm{cd}_2(\mathcal{F}) \geq n - 2k + 2$ für $\mathcal{F} = \binom{[n]}{k}$ mit $n \geq 2k$.

Aufgabe 9.2

a) Zeigen Sie, dass jeder einfache Graph isomorph zu einem Knesergraphen KG($\mathcal{F}$) für ein passendes Mengensystem $\mathcal{F}$ ist.

b) Die Definition von KG($\mathcal{F}$) lässt sich für den Fall einer Multimenge $\mathcal{F}$, d.h. den Fall, dass einzelne Mengen mehrfach in $\mathcal{F}$ enthalten sein können, erweitern: Für jede Menge $F \in \mathcal{F}$ hat KG($\mathcal{F}$) nicht nur einen Knoten, sondern k, falls F k-mal in $\mathcal{F}$ vorkommt.

   Für einen gegebenen Graphen G wollen wir eine Multimenge $\mathcal{F}$ finden, so dass KG($\mathcal{F}$) isomorph zu G ist und $|\bigcup \mathcal{F}|$ so klein wie möglich. Wir betrachten also

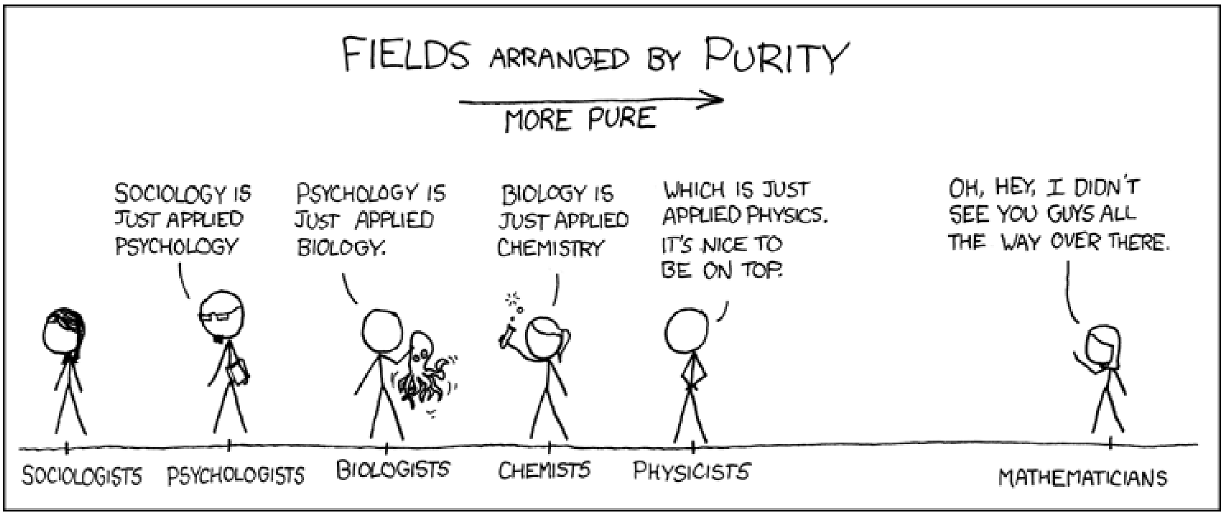
   $$i(G) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} : \exists \text{ Multimenge } \mathcal{F} \text{ mit } \left|\bigcup \mathcal{F}\right| = k \text{ und } \mathrm{KG}(\mathcal{F}) \cong G \right\}.$$

   Formulieren Sie das Problem der Bestimmung von $i(G)$ als ganzzahliges lineares Programm.

Aufgabe 9.3 Seien $a, b \in \mathbb{N}$, so dass je zwei beliebige kompakte Mengen in der Ebene durch eine Gerade im Größenverhältnis $a : b$ geteilt werden können. Zeigen Sie, dass $a = b$.

Aufgabe 9.4 Seien A, B, C endliche Mengen im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass alle drei Mengen gleichzeitig durch eine Gerade oder einen Kreis halbiert werden können.
Tipp: Wie könnte man die Abbildung $(x, y) \mapsto (x, y, x^2 + y^2)$ verwenden?

Abgabe: Bearbeitete Aufgaben bis spätestens Mittwoch, den 10. Dezember 2014 um 23 Uhr 59, in das Onlineformular auf der Vorlesungshomepage eintragen.



Randall Munroe - http://xkcd.com/435/