

Skript zur Vorlesung
**Methoden und Probleme
der diskreten Mathematik**

Wintersemester 2014/15

Prof. Dr. Frank Vallentin
Dr. Anna Gundert
Dr. Frederik von Heymann

Mathematisches Institut
Universität zu Köln
Weyertal 86-90
50931 Köln
Germany

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Extremale endliche Mengen	5
1. Der Satz von Erdős-Ko-Rado	5
2. Variation: (n, k, t) -Schnittfamilien	10
3. Weitere Variationen: Schnittfamilien in anderen Strukturen	11
4. Vorgegebene Schnittmuster	12
5. Geometrische Anwendungen	14
Literatur zu Kapitel 1	19
Kapitel 2. Gitterpunkt-Enumeration	21
1. Polytope und Polyeder	21
2. Erste Beispiele	22
3. Der Satz von Pick	26
4. Ehrhart-Theorie	28
5. Reziprozität	38
Literatur zu Kapitel 2	43
Kapitel 3. Topologische Methoden	45
1. Der Satz von Borsuk-Ulam	45
2. Beweis der Kneser-Vermutung	48
3. Modellierung von topologischen Räumen durch Simplicialkomplexe	49
4. Das Lemma von Tucker	52
5. Abstrakte Simplicialkomplexe und \mathbb{Z}_2 -Homologie	58
6. Weitere Anwendungen des Satzes von Borsuk-Ulam	60
Literatur zu Kapitel 3	69
Kapitel 4. Fourier-Analyse in endlichen abelschen Gruppen	71
1. Grundlagen	71
2. Erste Anwendung: Dreiecksschnittfamilien von Graphen	75
3. Zweite Anwendung: Arithmetische Progressionen	81
Literatur zu Kapitel 4	87
Kapitel 5. Regularität	89
1. Einführung in die extremale Graphentheorie	89
2. Das Regularitätslemma von Szemerédi	91
3. Erste Anwendung: Der Satz von Roth über 3-AP	94
4. Zweite Anwendung: Der Satz von Erdős, Stone, Simonovits	96
Literatur zu Kapitel 5	97

Extremale endliche Mengen

Sei $[n] = \{1, \dots, n\}$ die Menge der ersten n natürlichen Zahlen. Ein Grundproblem der extremalen Kombinatorik ist das folgende: Sei \mathcal{F} eine Familie von verschiedenen Teilmengen von $[n]$, d.h. $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ ist eine Teilmenge der Potenzmenge von $[n]$. Angenommen die Elemente der Familie \mathcal{F} erfüllen eine zusätzliche bestimmte Eigenschaft. Dann möchte man zwei Fragen beantworten:

- (1) Wie groß bzw. klein kann die Kardinalität $|\mathcal{F}|$ sein?
- (2) Wie sehen die extremalen Familien \mathcal{F} mit maximaler bzw. minimaler Kardinalität aus?

Zum Beispiel werden wir uns besonders mit Schnittfamilien auseinandersetzen. Eine Familie $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ heißt n -Schnittfamilie, falls der Durchschnitt von je zwei Elementen $A, B \in \mathcal{F}$ nicht leer ist, $A \cap B \neq \emptyset$. Nun sind die zwei Fragen:

- (1) Was ist die größtmögliche Kardinalität einer n -Schnittfamilie?
- (2) Wie sehen extremale n -Schnittfamilien aus, d.h. die \mathcal{F} die die maximale Kardinalität annehmen?

Dies zu beantworten ist Inhalt von Aufgabe 1.1.

1. Der Satz von Erdős-Ko-Rado

Einer der Startpunkte der extremalen Kombinatorik ist der Satz von Erdős-Ko-Rado. Er wurde 1938 gemeinsam von Paul Erdős, Chao Ko und Richard Rado in Cambridge entdeckt. Allerdings veröffentlichten die Autoren den Satz erst im Jahr 1961. Ein Grund war, dass sich zum früheren Zeitpunkt nur wenige Mathematiker für das Gebiet Kombinatorik interessierten. Heute wird der Satz als sehr wichtig angesehen: Endliche Strukturen bilden die mathematische Grundlage der Informatik. Außerdem erlaubt der Satz sehr verschiedene Beweise und Variationen.

DEFINITION 1.1. Eine Familie $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ heißt (n, k) -Schnittfamilie, falls

- (i) jedes $A \in \mathcal{F}$ Kardinalität k besitzt: $|A| = k$,
- (ii) für je zwei $A, B \in \mathcal{F}$ der Durchschnitt nicht leer ist: $A \cap B \neq \emptyset$.

Zunächst machen wir zwei Bemerkungen: Falls $n < 2k$ ist, dann schneiden sich $A, B \in 2^{[n]}$ mit $|A| = |B| = k$ immer. Deswegen nehmen wir nun $n \geq 2k$ an. Des Weiteren wird sich durch den Satz von Erdős-Ko-Rado herausstellen, dass zum Beispiel die (n, k) -Schnittfamilie

$$\mathcal{F}_0 = \{A \in 2^{[n]} : |A| = k, 1 \in A\}$$

mit $|\mathcal{F}_0| = \binom{n-1}{k-1}$ extremal ist.

SATZ 1.2. (Erdős-Ko-Rado, 1961 [6])

Sei $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ eine (n, k) -Schnittfamilie. Dann gilt

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}, \quad \text{falls } n \geq 2k.$$

Im Folgenden wollen wir zwei verschiedene Beweise dieses Satzes angeben. Der erste sehr elegante Beweis geht auf Gyula O. Katona zurück, der ihn 1972 fand. Der zweite Beweis stammt von László Lovász, der ihn 1979 publizierte. Der Beweis von Lovász ist technisch anspruchsvoller und länger als der von Katona. Dafür beweist er eine stärkere Aussage und die Beweismethode lässt sich gewinnbringend auf eine Vielzahl von anderen Problemen der diskreten Mathematik anwenden.

1.1. Der Beweis von Katona.

LEMMA 1.3. *Sei $n \geq 2k$. Betrachte die Mengen*

$$(1) \quad A_i = \{i, i+1, \dots, i+k-1\} \subseteq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \text{mit } i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Sei $\mathcal{G} \subseteq \{A_0, \dots, A_{n-1}\}$ eine Familie, in der sich je zwei Elemente $A, B \in \mathcal{G}$ schneiden, $A \cap B \neq \emptyset$. Dann hat die Familie \mathcal{G} höchstens k Elemente: $|\mathcal{G}| \leq k$.

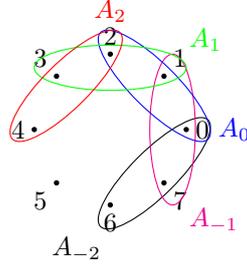


ABBILDUNG 1. $n = 8, k = 3$.

BEWEIS. Wir können durch zyklisches Schieben ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $A_0 \in \mathcal{G}$ ist. Die Mengen, die A_0 schneiden, sind

$$A_{-1}, A_{-2}, \dots, A_{-(k-1)}, A_1, A_2, \dots, A_{k-1}.$$

Falls $A_{-j} \in \mathcal{G}$, dann $A_{k-j} \notin \mathcal{G}$ und umgekehrt, weil $n \geq 2k$. Also ist $|\mathcal{G}| \leq k$. \square

KATONAS BEWEIS VON SATZ 1.2, 1972 [12]. Sei \mathcal{F} eine (n, k) -Schnittfamilie. Wähle eine zufällige, gleichverteilte Permutation $\pi: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Wir fassen $A \in \mathcal{F}$ als eine Teilmenge von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ auf, so dass wir das Bild $\pi(A) \subseteq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ betrachten können. Wir definieren die Zufallsvariable

$$X = |\{A \in \mathcal{F} : \pi(A) = A_i \text{ für ein } i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}|,$$

wobei die Mengen A_i in (1) definiert wurden. Dann gilt einerseits nach Lemma 1.3

$$\mathbb{E}[X] \leq k,$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{A \in \mathcal{F}} \Pr[\pi(A) = \pi(A_i) \text{ für ein } i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}] \\ &= \sum_{A \in \mathcal{F}} n \frac{k!(n-k)!}{n!} \\ &= \frac{n}{\binom{n}{k}} |\mathcal{F}|. \end{aligned}$$

Also

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$$

und die Behauptung folgt. \square

1.2. Der Beweis von Lovász.

DEFINITION 1.4. Sei $n \geq 2k$. Definiere den Knesergraph $K(n, k) = (V, E)$ durch

$$V = \{A \in 2^{[n]} : |A| = k\} \quad \text{und} \quad E = \{\{A, B\} : A, B \in V, A \cap B = \emptyset\}.$$

Es ist klar, dass die unabhängigen Mengen im Knesergraph $K(n, k)$ genau den (n, k) -Schnittfamilien entsprechen. Ziel ist es nun, die maximale Kardinalität einer unabhängigen Menge, die *Unabhängigkeitszahl* $\alpha(K(n, k))$, zu bestimmen.

Der nachfolgende Satz, der auf Alan J. Hoffman zurückgeht, gibt eine obere Schranke für die Unabhängigkeitszahl eines regulären Graphen an, die man durch die Berechnung des kleinsten Eigenwertes seiner Adjazenzmatrix gewinnt.

SATZ 1.5. Sei $G = (V, E)$ ein r -regulärer Graph, das heißt zu jedem Knoten sind genau r Kanten inzident,

$$\forall v \in V : |\{e \in E : v \in e\}| = r.$$

Es sei $A \in \mathbb{R}^{V \times V}$ die Adjazenzmatrix von G , also

$$A_{v,w} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \{v, w\} \in E \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und sei λ_{\min} der kleinste Eigenwert von A . Dann gilt

$$\alpha(G) \leq \frac{-|V|\lambda_{\min}}{r - \lambda_{\min}}.$$

BEWEIS. Sei $I \subseteq V$ eine unabhängige, nicht leere Menge von G . Betrachte den charakteristischen Vektor $1_I \in \mathbb{R}^V$ und zerlege diesen orthogonal als

$$1_I = \beta 1_V + g$$

mit $\beta \in \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{R}^V$ und $g^\top 1_V = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |I| &= 1_I^\top 1_V = \beta |V| \\ |I| &= 1_I^\top 1_I = \beta^2 |V| + \|g\|^2. \end{aligned}$$

Aufgrund der Unabhängigkeit von I ist

$$\begin{aligned} 0 &= 1_I^\top A 1_I = (\beta 1_V + g)^\top A (\beta 1_V + g) \\ &= \underbrace{\beta^2 1_V^\top A 1_V}_{(1)} + \underbrace{2\beta 1_V^\top A g}_{(2)} + \underbrace{g^\top A g}_{(3)}. \end{aligned}$$

Betrachte die drei Summanden einzeln:

- (1) ist gleich $\beta^2 r |V|$, weil 1_V Eigenvektor von A mit Eigenwert r ist, was aus der r -Regularität von G folgt.
- (2) ist gleich 0, da 1_V ein Eigenvektor von A und $1_V^\top g = 0$ ist.
- (3) ist wenigstens $\lambda_{\min} \|g\|^2$, denn nach dem Rayleigh-Ritz-Prinzip gilt:

$$\lambda_{\min} = \min_{f \in \mathbb{R}^V \setminus \{0\}} \frac{f^\top A f}{f^\top f} \leq \frac{g^\top A g}{g^\top g}.$$

Mit diesen drei Erkenntnissen erhält man aus der vorangegangenen Gleichung

$$0 \geq \beta^2 r |V| + \lambda_{\min} (\beta |V| - \beta^2 |V|).$$

Teilt man nun durch $\beta |V|$, so hat man

$$\beta \leq \frac{-\lambda_{\min}}{r - \lambda_{\min}}$$

und somit

$$|I| \leq \frac{-|V|\lambda_{\min}}{r - \lambda_{\min}}.$$

□

LOVÁSZ BEWEIS VON SATZ 1.2, 1979 [13]. Wir wollen Satz 1.5 anwenden. Der Knesergraph $K(n, k)$ ist r -regulär mit $r = \binom{n-k}{k}$. Wir behaupten, dass die Adjazenzmatrix von $K(n, k)$ den kleinsten Eigenwert

$$\lambda_{\min} = -\binom{n-k-1}{k-1}$$

besitzt. Dann folgt mit Satz 1.5 der Satz von Erdős-Ko-Rado:

$$\alpha(K(n, k)) \leq \frac{\binom{n}{k} \binom{n-k-1}{k-1}}{\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}} = \frac{\binom{n}{k}}{\frac{n-k}{k} + 1} = \frac{\binom{n}{k}}{\frac{n}{k}} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Nun muss noch der kleinste Eigenwert ausgerechnet werden. Dafür berechnen wir *alle* Eigenwerte der Adjazenzmatrix A des Knesergraphen: Definiere für $t \in [k]$ die Menge aller t -elementigen Teilmengen von $[n]$ durch

$$\binom{[n]}{t} := \{B \in 2^{[n]} : |B| = t\}.$$

Außerdem definieren wir für jedes $t \in [k]$ die zwei linearen Abbildungen

$$f: \mathbb{R}^{\binom{[n]}{t}} \rightarrow \mathbb{R}^{\binom{[n]}{t-1}} \quad \text{und} \quad g: \ker f \rightarrow \mathbb{R}^{\binom{[n]}{k}},$$

die komponentenweise definiert sind durch

$$(f(x))_S = \sum_{T \in \binom{[n]}{t}, S \subseteq T} x_T, \quad \text{wobei } S \in \binom{[n]}{t-1}$$

$$(g(x))_U = \sum_{T \in \binom{[n]}{t}, T \subseteq U} x_T, \quad \text{wobei } U \in \binom{[n]}{k}.$$

Über diese beiden Abbildungen kann man die folgenden drei Aussagen treffen:

- f ist surjektiv, also $\dim \ker f = \binom{n}{t} - \binom{n}{t-1}$,
- g ist injektiv und
- $g(\ker f) \subseteq \text{Eig}\left(A, (-1)^t \binom{n-k-t}{k-t}\right)$.

Die Aussagen a) und b) werden in Aufgabe 2.2 bearbeitet, c) zeigen wir am Ende dieses Beweises.

Für verschiedene t sind die zugehörigen Eigenwerte verschieden. Nun folgt aus a)–c) und der r -Regularität des Knesergraphen

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^k \dim \text{Eig}\left(A, (-1)^t \binom{n-k-t}{k-t}\right) &\geq 1 + \sum_{t=1}^k \left(\binom{n}{t} - \binom{n}{t-1}\right) \\ &= \binom{n}{k} = \dim \mathbb{R}^{\binom{[n]}{k}}. \end{aligned}$$

Entsprechend gilt die Gleichheit

$$\dim \text{Eig}\left(A, (-1)^t \binom{n-k-t}{k-t}\right) = \binom{n}{t} - \binom{n}{t-1}.$$

Das bedeutet, dass wir alle Eigenwerte von A bestimmt haben. Den kleinsten Eigenwert erhalten wir bei $t = 1$, nämlich $\lambda_{\min} = (-1) \binom{n-k-1}{k-1}$, was wir zeigen wollten.

Was nun noch bleibt, ist der Nachweis der Aussage c): Es sei $x \in \mathbb{R}^{\binom{[n]}{t}}$, $x \neq 0$, mit $x \in \ker f$. Wir zeigen jetzt, dass $g(x)$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $(-1)^t \binom{n-k-t}{k-t}$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned} [Ag(x)]_V &= \sum_{U \in \binom{[n]}{k}, U \cap V = \emptyset} g(x)_U = \sum_{U \in \binom{[n]}{k}, U \cap V = \emptyset} \sum_{T \in \binom{[n]}{t}, T \subseteq U} x_T \\ &= \sum_{T \in \binom{[n]}{t}, T \cap V = \emptyset} \binom{n-k-t}{k-t} x_T = \binom{n-k-t}{k-t} \underbrace{\sum_{T \in \binom{[n]}{t}, T \cap V = \emptyset} x_T}_{=: \beta_0}. \end{aligned}$$

Definiere

$$\beta_i = \sum_{T \in \binom{[n]}{t}, |T \cap V| = i} x_T.$$

Da $x \in \ker f$ gilt, hat man

$$\sum_{T \in \binom{[n]}{t}, S \subseteq T} x_T = 0 \quad \text{für alle } S \in \binom{[n]}{t-1},$$

und deshalb auch

$$0 = \sum_{S \in \binom{[n]}{t-1}, |S \cap V| = i} \sum_{T \in \binom{[n]}{t}, S \subseteq T} x_T = (i+1)\beta_{i+1} + (t-1)\beta_i.$$

Aus dieser Gleichung erhält man rekursiv die Vorschrift

$$\beta_i = (-1)^i \binom{t}{i} \beta_0,$$

folglich

$$\begin{aligned} \beta_0 &= (-1)^t \beta_t \\ &= (-1)^t \sum_{T \in \binom{[n]}{t}, |T \cap V| = t} x_T \\ &= (-1)^t \sum_{T \in \binom{[n]}{t}, T \subseteq V} x_T \\ &= (-1)^t g(x)_V. \end{aligned}$$

Also gilt

$$[Ag(x)]_V = \binom{n-k-t}{k-t} \beta_0 = (-1)^t \binom{n-k-t}{k-t} g(x)_V,$$

wie gewünscht. \square

BEMERKUNG. Es ist festzuhalten:

- Der Beweis von Lovász zeigt sogar, dass die Shannon-Kapazität von $K(n, k)$ gleich $\binom{n-1}{k-1}$ ist, siehe Vorlesung Nichtlineare Optimierung (WS 2013/14) bzw. Vorlesung Konvexe Optimierung (WS 2014/15).
- Die Beweismethode von Lovász ist sehr vielseitig einsetzbar, wie wir noch sehen werden.

2. Variation: (n, k, t) -Schnittfamilien

DEFINITION 2.1. Eine Familie $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ heißt (n, k, t) -Schnittfamilie, falls jede Menge $A \in \mathcal{F}$ k -elementig ist und je zwei Mengen $A, B \in \mathcal{F}$ in mindestens t Elementen übereinstimmen. Sprich:

- (i) $\forall A \in \mathcal{F} : |A| = k,$
- (ii) $\forall A, B \in \mathcal{F} : |A \cap B| \geq t.$

$(n, k, 1)$ -Schnittfamilien sind genau die (n, k) -Schnittfamilien. Das Studium von (n, k, t) -Schnittfamilien ist nur dann nicht trivial, wenn $n > 2k - t$ ist. Denn für $n \leq 2k - t$ ist für je zwei Elemente $A, B \in \binom{[n]}{k}$ stets Bedingung (ii) erfüllt.

Konstruktion von (n, k, t) -Schnittfamilien.

DEFINITION 2.2. Eine Familie $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ heißt t -fixiert, falls es eine Menge T mit $|T| = t$ gibt, so dass $T \subseteq A$ für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt.

BEISPIEL. Für beliebiges $t \in [k]$ ist

$$\mathcal{F}_0 = \left\{ A \in \binom{[n]}{k} : [t] \subseteq A \right\}$$

eine t -fixierte (n, k, t) -Schnittfamilie mit $|\mathcal{F}_0| = \binom{n-t}{k-t}$.

Offensichtlich sind t -fixierte Familien (n, k, t) -Schnittfamilien. In Analogie zu dem Satz von Erdős-Ko-Rado stellt man sich nun natürlich die Frage: *Ist jede (n, k, t) -Schnittfamilie mit maximaler Kardinalität eine t -fixierte Familie mit Kardinalität $\binom{n-t}{k-t}$?* Als Antwort stellt sich heraus: *Ja, aber nur wenn n hinreichend groß ist.*

Für $0 \leq r \leq k - t$ definiere

$$\mathcal{F}_r = \left\{ A \in \binom{[n]}{k} : |A \cap [t + 2r]| \geq t + r \right\}.$$

Dann ist für $A, B \in \mathcal{F}_r$:

$$\begin{aligned} |A \cap B| &\geq |(A \cap [t + 2r]) \cap (B \cap [t + 2r])| \\ &\geq (t + r) + (t + r) - (t + 2r) = t, \end{aligned}$$

das heißt \mathcal{F}_r ist eine (n, k, t) -Schnittfamilie, wobei

$$|\mathcal{F}_r| = \sum_{s=t+r}^k \binom{t+2r}{s} \binom{n-t-2r}{k-s}.$$

Dabei ist zum Beispiel für $n = 8, k = 5, t = 3$: $|\mathcal{F}_0| = 10, |\mathcal{F}_1| = |\mathcal{F}_2| = 21$.

VERMUTUNG (Frankl, 1978 [7]). *Es sei \mathcal{F} eine (n, k, t) -Schnittfamilie, dann gilt*

$$|\mathcal{F}| \leq \max_{0 \leq r \leq k-t} |\mathcal{F}_r|.$$

Eine Beobachtung dazu, die in Aufgabe 2.4. bewiesen wird, lautet: Falls $n \geq (k - t + 1)(t + 1)$, dann gilt für alle $r \in [k - t]$: $|\mathcal{F}_r| \leq |\mathcal{F}_0|$.

THEOREM (Wilson, 1984 [14]). *Für $n \geq (k - t - 1)(t + 1)$ gilt für jede (n, k, t) -Schnittfamilie \mathcal{F} :*

$$|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{F}_0| = \binom{n-t}{k-t}.$$

Der Beweis hierzu ist eine Erweiterung der Strategie von Lovász für den Beweis zu 1.2.

THEOREM (Ahlsweide, Khachatryan, 1997 [1]). *“The complete intersection theorem”: Die Vermutung von Frankl stimmt.*

Wir beweisen hier nur den folgenden, einfachen Spezialfall, den man mit Hilfe mehrerer grober Abschätzungen einsehen kann.

SATZ 2.3. *Für $t \in [k]$ gibt es eine Konstante $C(k, t)$, so dass für $n \geq C(k, t)$ gilt: Für alle (n, k, t) -Schnittfamilien \mathcal{F} gilt: $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{F}_0|$, wobei Gleichheit nur für t -fixierte (n, k, t) -Schnittfamilien gelten kann.*

BEWEIS. Offensichtlich gilt für jede t -fixierte Familie \mathcal{F} , dass sie maximal so viele Elemente hat wie \mathcal{F}_0 . Der Satz folgt also, indem man zeigt, dass jede nicht t -fixierte Familie \mathcal{F} ab einem gewissen n echte Ungleichung $|\mathcal{F}| < |\mathcal{F}_0|$ erfüllt.

Angenommen \mathcal{F} ist nicht t -fixiert. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass es $A, B \in \mathcal{F}$ gibt mit $|A \cap B| = t$ (\rightarrow Aufgabe). Da \mathcal{F} nicht t -fixiert ist, gibt es $C \in \mathcal{F}$, so dass $A \cap B \not\subseteq C$. Für jedes $D \in \mathcal{F}$ gilt

$$|D \cap A \cup B \cup C| \geq t + 1.$$

Also

$$\left| D \cap ([n] \setminus (A \cup B \cup C)) \right| \leq k - t - 1,$$

und weiter

$$|\mathcal{F}| \leq 2^{|A \cup B \cup C|} \sum_{i=0}^{k-t-1} \binom{n}{i} \leq 2^{3k} (k-t) n^{k-t-1} \leq C_1(k, t) n^{k-t-1}.$$

Andererseits gilt für die t -fixierte Familie \mathcal{F}_0 :

$$|\mathcal{F}_0| = \binom{n-t}{k-t} > \frac{(n-k)^{k-t}}{(k-t)!} \geq C_2(k, t) n^{k-t}.$$

Entsprechend hat man für die Wahl $n \geq C(k, t) = \frac{C_1(k, t)}{C_2(k, t)}$ durch die Kombination der beiden Beobachtungen die Folgerung

$$|\mathcal{F}| \leq C_1(k, t) n^{k-t-1} = C(k, t) C_2(k, t) n^{k-t-1} \leq C_2(k, t) n^{k-t} < |\mathcal{F}_0|.$$

□

Wie bereits gesagt: Die Abschätzung von $|\mathcal{F}|$ ist sehr grob.

3. Weitere Variationen: Schnittfamilien in anderen Strukturen

3.1. Erdős-Ko-Rado für \mathbb{F}_q -Vektorräume. Es sei q eine Primzahlpotenz und \mathbb{F}_q der entsprechende endliche Körper mit q Elementen.

DEFINITION 3.1. *Eine Familie \mathcal{F} von k -dimensionalen Untervektorräumen von \mathbb{F}_q^n heißt (q, n, k, t) -Schnittfamilie, falls*

$$\forall A, B \in \mathcal{F} : \dim(A \cap B) \geq t.$$

Es sei $\text{span}\{e_1, \dots, e_t\} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ der t -dimensionale Untervektorraum von \mathbb{F}_q^n , der von den ersten t Standardbasisvektoren erzeugt wird. Definiere die t -fixierte Familie

$$\mathcal{F}_0 = \{A : A \subseteq \mathbb{F}_q^n, A \text{ ist } k\text{-dimensionaler Untervektorraum, } e_1, \dots, e_t \in A\}.$$

Dann ist $|\mathcal{F}_0| = \binom{n-t}{k-t}_q$, wobei dieser besondere Binomialkoeffizient wie folgt definiert ist:

DEFINITION 3.2. Der Gaußsche Binomialkoeffizient ist definiert als

$$\begin{aligned} \binom{n}{k}_q &= \left| \left\{ U : U \subseteq \mathbb{F}_q^n, U \text{ ist } k\text{-dimensionaler Untervektorraum von } \mathbb{F}_q^n \right\} \right| \\ &= \frac{\prod_{i=n-k+1}^n (q^i - 1)}{\prod_{i=1}^k (q^i - 1)}. \end{aligned}$$

Wenn man $\binom{n}{k}_q$ als Polynom in q betrachtet, gilt $\binom{n}{k}_1 = \binom{n}{k}$.

SATZ 3.3 (Frankl, Wilson, 1986 [9]). Falls $n \geq 2k$, dann gilt für eine (q, n, k, t) -Schnittfamilie \mathcal{F} :

$$|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{F}_0| = \binom{n-t}{k-t}_q.$$

Auch der Beweis dieses Satzes ist eine Variante von Lovász Beweis für 1.2.

3.2. Erdős-Ko-Rado für Permutationen. Sei S_n gegeben als Gruppe der Permutationen von n Elementen,

$$S_n = \{ \sigma : [n] \rightarrow [n] : \sigma \text{ bijektiv} \}$$

DEFINITION 3.4. Eine Familie $\mathcal{F} \subseteq S_n$ heißt (n, t) -Schnittfamilie von Permutationen, wenn je zwei Permutationen aus \mathcal{F} mindestens t Elemente gleich abbilden. In Formeln:

$$\forall \sigma, \tau \in \mathcal{F} \exists i_1, \dots, i_t \in [n] \forall k \in [t] : \sigma(i_k) = \tau(i_k).$$

SATZ 3.5 (Ellis, Friedgut, Pilpel, 2011 [5]). Für $t \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $C(t)$, so dass für alle $n \geq C(t)$ gilt: Sei \mathcal{F} eine (n, t) -Schnittfamilie von Permutationen, dann ist

$$|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{F}_0| = (n-t)!,$$

wobei $\mathcal{F}_0 := \{ \sigma \in S_n : \sigma(k) = k \text{ für alle } k \in [t] \}$.

Wiederum ist der Beweis dieses Satz eine Variante von Lovász Beweis. Offenes Problem: Ein optimales (minimales) $C(t)$ ist nicht bekannt.

3.3. Schnittfamilien auf weiteren Strukturen. Analog zu den (n, t) -Schnittfamilien von Permutationen, kann man (q, n, t) -Schnittfamilien von Transformationen in der Gruppe $GL_n(\mathbb{F}_q)$ definieren. Auch hier scheint es ein EKR-Theorem zu geben. Bislang ist das aber nur eine unbewiesene, mit Computerexperimenten unterlegte, Vermutung.

Im dritten Teil der Vorlesung werden uns Schnittfamilien in Graphen begegnen.

4. Vorgegebene Schnittmuster

SATZ 4.1. Es seien $t \geq 1$ und $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ eine n -Schnittfamilie, so dass für alle $A, B \in \mathcal{F}$ mit $A \neq B$ gilt $|A \cap B| = t$. Dann gilt $|\mathcal{F}| \leq n$.

BEWEIS. Wir können annehmen, dass jedes Element $A \in \mathcal{F}$ mindestens $t+1$ Elemente hat, ansonsten würde laut Definition für jedes $B \in \mathcal{F}$ die Inklusion $A \subseteq B$ gelten und es wäre $|\mathcal{F}| \leq 1 + n - t$.

Betrachte die Menge der Inzidenzvektoren

$$M = \{1_A : A \in \mathcal{F}\} \subset \mathbb{R}^{[n]}.$$

Wir zeigen, dass M linear unabhängig ist. Dann gilt $|M| \leq n$ und somit die Behauptung.

Dazu wollen wir aus der Darstellung

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} \lambda_A 1_A = 0, \quad \text{mit } \lambda_A \in \mathbb{R}$$

bereits $\lambda_A = 0$ für alle $A \in \mathcal{F}$ folgern. Es gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\sum_{A \in \mathcal{F}} \lambda_A 1_A \right)^\top \left(\sum_{A \in \mathcal{F}} \lambda_A 1_A \right) \\
&= \sum_{A, B \in \mathcal{F}} \lambda_A \lambda_B 1_A^\top 1_B \\
&= \sum_{A \in \mathcal{F}} \lambda_A^2 |A| + \sum_{A, B \in \mathcal{F}, A \neq B} \lambda_A \lambda_B t \\
&\geq \sum_{A \in \mathcal{F}} \lambda_A^2 (t+1) + \sum_{A, B \in \mathcal{F}, A \neq B} \lambda_A \lambda_B t \\
&= t \left(\sum_{A \in \mathcal{F}} \lambda_A \right)^2 + \sum_{A \in \mathcal{F}} \lambda_A^2
\end{aligned}$$

Also $\sum_{A \in \mathcal{F}} \lambda_A^2 = 0$ und somit ist $\lambda_A = 0$ für jedes $A \in \mathcal{F}$. \square

FRAGE. Wann gilt $|\mathcal{F}| = n$?

SATZ 4.2. (Frankl, Wilson, 1981 [8]). *Es sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ eine Familie mit den folgenden Eigenschaften:*

- (i) $\forall A \in \mathcal{F} : |A| = 2p - 1$,
- (ii) $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \neq B : |A \cap B| \neq p - 1$.

Dann gilt

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \binom{n}{i}.$$

BEWEIS. Für $A \in \mathcal{F}$ betrachte den charakteristischen Vektor $1_A \in \mathbb{R}^n$ und das Polynom

$$f_A(x) = \prod_{s=0}^{p-2} \left(\left(\sum_{i \in A} x_i \right) - s \right) \in \mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_n],$$

wobei modulo p gerechnet wird. Dann ist

$$f_A(1_B) = \prod_{s=0}^{p-2} (|A \cap B| - s) \pmod{p}.$$

Deswegen gilt

$$f_A(1_B) \neq 0 \iff |A \cap B| = p - 1 \pmod{p}.$$

Im Fall $A = B$ hat man $|A \cap A| = 2p - 1 = p - 1 \pmod{p}$, also $f_A(1_A) \neq 0$.

Im Fall $A \neq B$, ist $|A \cap B| \leq 2p - 2$, also hat man wegen der Eigenschaft (ii) von \mathcal{F} sicherlich $|A \cap B| \neq p - 1 \pmod{p}$, das heißt $f_A(1_B) = 0$ für $A \neq B$.

Man kann f_A auch als Funktion $f_A: \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{F}_p$ auffassen. Betrachte dann den durch diese Funktionen über \mathbb{F}_p erzeugten Vektorraum:

$$V_{\mathcal{F}} = \text{span}\{f_A : A \in \mathcal{F}\}.$$

Nun zeigen wir zunächst, dass

$$|\mathcal{F}| = \dim V_{\mathcal{F}}$$

gilt, indem wir die lineare Unabhängigkeit von $\{f_A : A \in \mathcal{F}\}$ prüfen. Es seien $\lambda_A \in \mathbb{F}_p$ für jedes $A \in \mathcal{F}$ und es sei $B \in \mathcal{F}$ beliebig. Dann gilt mit Hilfe der obigen beiden Beobachtungen:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{A \in \mathcal{F}} \lambda_A f_A \\ \implies 0 &= \sum_{A \in \mathcal{F}} \lambda_A f_A(1_B) = \lambda_B f_B(1_B) \\ \implies \lambda_B &= 0 \text{ für alle } B \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Das bedeutet, wir können anstelle von $|\mathcal{F}|$ auch $\dim V_{\mathcal{F}}$ abschätzen: Erneut als Funktionen $f_A : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{F}_p$ betrachtet, können wir annehmen, dass jedes Monom $x_i^{j_i}$, das in f_A vorkommt, nur einen Exponenten $j_i \in \{0, 1\}$ haben kann, da z.B. x_i und x_i^2 die gleichen Funktionen darstellen. Außerdem haben die Polynome f_A höchstens Grad $p-1$. Jedes Element $f_A \in V_{\mathcal{F}}$ lässt sich also als Linearkombination aus Polynomen darstellen, die höchstens Grad $p-1$ haben und das Produkt von solchen Monomen sind. Das heißt:

$$V_{\mathcal{F}} \subseteq W := \text{span} \left\{ \prod_{i \in I} x_i^{j_i} \in \mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_n] : I \subseteq [n], |I| = p-1, j_i \in \{0, 1\} \right\}.$$

Die erzeugenden Elemente von W lassen sich abzählen, indem man die Polynome zählt, die keinen Exponenten j_i gleich 1 haben (das Einspolynom), dann die, die einen Exponenten gleich 1 haben (die n Monome x_1, \dots, x_n), usw., bis man schließlich die Polynome zählt, die alle $p-1$ Exponenten gleich 1 haben:

$$\dim V_{\mathcal{F}} \leq \dim W \leq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \cdots \binom{n}{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{n}{i}.$$

□

5. Geometrische Anwendungen

5.1. Die chromatische Zahl des \mathbb{R}^n .

DEFINITION 5.1. Die chromatische Zahl $\chi(\mathbb{R}^n)$ des \mathbb{R}^n ist definiert als die minimale Anzahl an Mengen einer Partition von \mathbb{R}^n , wobei keine Menge der Partition zwei Punkte enthält, deren Abstand 1 ist. In Formeln:

$$\chi(\mathbb{R}^n) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} : \exists \text{ Partition } \mathbb{R}^n = \bigcup_{i \in [k]} X_i, \forall i \in [k] \forall x, y \in X_i : \|x - y\| \neq 1 \right\}$$

Graphentheoretisch ist $\chi(\mathbb{R}^n)$ die chromatische Zahl des unendlichen Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \mathbb{R}^n$ und $E = \{\{x, y\} : \|x - y\| = 1\}$.

Die chromatische Zahl $\chi(\mathbb{R}^n)$ ist nur für $n = 1$ bekannt. Es gilt $\chi(\mathbb{R}^1) = 2$:



ABBILDUNG 2. Partitionierung von \mathbb{R} in zwei Mengen.

Für $n = 2$ kennt man lediglich Schranken, $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$ (vergleiche Abbildung 3).

VERMUTUNG (Erdős). $\chi(\mathbb{R}^n)$ wächst exponentiell in n .

SATZ 5.2. (Frankl, Wilson, 1981 [8]). Die Vermutung von Erdős stimmt.

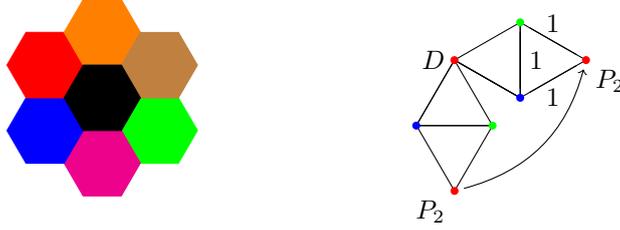


ABBILDUNG 3. LINKS: Mit solchen Konstrukten aus 7 Waben, lässt sich eine geforderte Partitionierung des \mathbb{R}^2 finden (wähle eine Wabenkantenlänge, so dass der Durchmesser der Waben fast 1 ist). RECHTS: Hier sieht man anhand der Eckpunkte von gleichseitigen Dreiecken (Kantenlänge 1), wieso $\chi(\mathbb{R}^2) > 3$ gilt. Man kann das untere Konstrukt an D so weit nach oben drehen, dass $|p_1 - p_2| = 1$ gilt. Dieser Graph ist der sogenannte Mosergraph.

LEMMA 5.3. Sei d eine positive reelle Zahl. Sei $G = (V, E)$ ein endlicher Graph mit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x, y \in E$ genau dann wenn $\|x - y\| = d$ ist. Dann gilt

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}.$$

BEWEIS. Die erste Ungleichung folgt aus der Tatsache, dass die Graph G ein endlicher Teilgraph des unendlichen Graphen, der $\chi(\mathbb{R}^n)$ definiert, ist, wenn man V mit dem Faktor $1/d$ skaliert. Die zweite Ungleichung folgt, indem man feststellt, dass jeder Teilmenge einer Partition von V insbesondere eine unabhängige Menge in G ist. \square

LEMMA 5.4. (Korollar zu Satz 4.2). Es sei p eine Primzahl, $n = 4p$ und $\mathcal{F} \subseteq \binom{[4p]}{2p-1}$ eine Familie mit $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \neq B : |A \cap B| \neq p - 1$. Dann gilt

$$\frac{|\mathcal{F}|}{\binom{4p}{2p-1}} \leq (0.91)^n.$$

BEWEIS. Gemäß Satz 4.2 gilt $|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \binom{4p}{i}$. An dieser Stelle könnte man die rechte Seite mit der Stirlingformel abschätzen, hier wird aber eine Variante verwendet, die fast ohne Analysis auskommt: Wegen $\binom{n}{k-1} = \frac{k}{n-k+1} \binom{n}{k}$ und der Voraussetzung $n \geq 4k$ gilt

$$\binom{n}{k-1} = \frac{1}{3} \binom{n}{k}.$$

Durch iterative Anwendung hiervon hat man:

$$\sum_{i=0}^{p-1} \binom{4p}{i} = \binom{4p}{p} \sum_{i=1}^p \frac{1}{3^i} \leq \binom{4p}{p} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1}{2} \binom{4p}{p}.$$

Dann hat man:

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{F}|}{\binom{4p}{2p-1}} &\leq \frac{1}{2} \cdot \binom{4p}{p} \cdot \frac{1}{\binom{4p}{2p-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(4p)!}{p!(4p-p)!} \cdot \frac{(2p-1)!(4p-2p+1)!}{(4p)!} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \prod_{i=1}^{p-1} \left(\frac{p+i}{2p+i+1}\right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^p = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{4}} \leq (0.91)^n. \end{aligned}$$

\square

BEWEIS VON SATZ 5.2. Es sei p eine Primzahl. Betrachte den Graphen $G = (V, E)$ mit

$$V = \left\{ x \in \{0, 1\}^{4p} : \|x\|^2 = 2p - 1 \right\},$$

$$E = \left\{ \{x, y\} : \|x - y\|^2 = d \right\},$$

wobei $d = (2p - 1) - 2(p - 1) + (2p - 1) = 2p$.

Wir identifizieren Vektoren $x \in \{0, 1\}^{4p}$, für die $\|x\|^2 = 2p - 1$ gilt, mit Teilmengen $X \in \binom{[4p]}{2p-1}$. Dann gilt

$$x^\top y = |X \cap Y|.$$

Somit entsprechen unabhängige Mengen in G genau den Familien $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ aus dem Satz 4.2 von Frankl-Wilson. Also gilt nach Lemma 5.3 und Lemma 5.4:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)} = \frac{\binom{4p}{2p-1}}{|\mathcal{F}_{\max}|} \geq (0.91)^{-n} \geq (1.09)^n.$$

□

5.2. Die Vermutung von Borsuk.

DEFINITION 5.5. *Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Der Durchmesser $\text{diam } X$ von X ist definiert durch*

$$\text{diam } X = \sup\{\|x - y\| : x, y \in X\}.$$

VERMUTUNG (Borsuk, 1933 [3]). *Für jedes $X \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt es eine Partition aus $n + 1$ Mengen, so dass jede Menge der Partition einen echt kleineren Durchmesser hat als X . Beziehungsweise:*

$$\exists X_1, \dots, X_{n+1} \subseteq X : \left(X = \bigcup_{i \in [n+1]} X_i \wedge \forall i \in [n+1] : \text{diam } X_i < \text{diam } X \right) ?$$

BEMERKUNG. Die Vermutung stellt sich nicht für n -elementige Partitionen, denn wählt man die Menge aller Eckpunkte eines regulären n -Simplex als X , so ist dies bereits ein Gegenbeispiel.

Im Falle der Einheitskugel, $X = B^n$, findet man eine von Borsuk vermutete Partition (eine Konstruktion wird in Abbildung 4 ersichtlich), wobei auch hier n -elementige Partitionen nicht ausreichen (\rightarrow Annas Vorlesung).

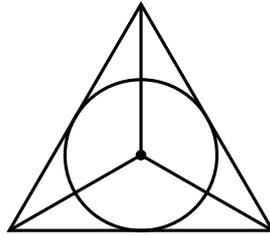


ABBILDUNG 4. Partitionierung von \mathbb{R}^2 in „Kuchenstücke“ mittels eines regulären 2-Simplex.

SATZ 5.6. (Kahn, Kalai, 1993 [11]). *Die Vermutung von Borsuk ist im Allgemeinen falsch. Es gibt ein $X \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass jede Partition $\{X_1, \dots, X_m\}$ von X mit $\text{diam } X_i < \text{diam } X$, $i \in [m]$, wenigstens exponentiell viele Elemente benötigt.*

Tensorprodukte. Betrachte den n -dimensionalen euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^n mit Skalarprodukt $x^\top y$ und Orthonormalbasis e_1, \dots, e_n .

DEFINITION 5.7. Das k -fache Tensorprodukt $(\mathbb{R}^n)^{\otimes k}$ ist der n^k -dimensionale euklidische Vektorraum mit Orthonormalbasis $\left\{ \bigotimes_{l=1}^k e_{i_l} : i_l \in [n] \right\}$ mit Skalarprodukt

$$\left(\bigotimes_{l=1}^k e_{i_l} \right)^\top \left(\bigotimes_{l=1}^k e_{j_l} \right) = \prod_{l=1}^k e_{i_l}^\top e_{j_l}$$

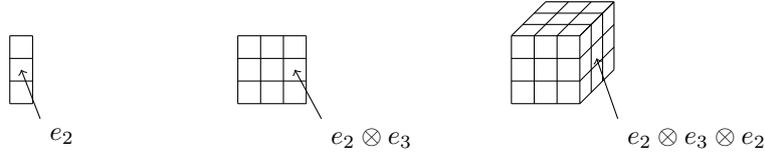


ABBILDUNG 5. Grafische Anschauung der Orthonormalbasiselemente von $(\mathbb{R}^3)^{\otimes 1}$, $(\mathbb{R}^3)^{\otimes 2}$ und $(\mathbb{R}^3)^{\otimes 3}$.

Es sei nun $v \in \mathbb{R}^n$ gegeben durch $v = \sum_{l=1}^n v_l e_l$. Dann ist $v^{\otimes k} \in (\mathbb{R}^n)^{\otimes k}$ definiert als

$$v^{\otimes k} = \bigotimes_{l=1}^k \left(\sum_{l=1}^n v_l e_l \right) \stackrel{\text{Distributivität}}{=} \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in [n]^k} \left(\prod_{l=1}^k v_{i_l} \bigotimes_{l=1}^k e_{i_l} \right).$$

Für $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\left(v^{\otimes k} \right)^\top \left(w^{\otimes k} \right) = \left(v^\top w \right)^k.$$

BEWEIS VON SATZ 5.6. Es sei p eine Primzahl und $n = 4p$. Es sei

$$\mathcal{A} = \{ A \in 2^{[n]} : |A| = 2p - 1 \}.$$

Für $A \in \mathcal{A}$ definiere $u_A \in \mathbb{R}^n$ durch

$$u_{A,i} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in A \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Betrachte die Tensorprodukte $u_A^{\otimes 2} \in (\mathbb{R}^n)^{\otimes 2}$. Dann gilt

$$\|u_A^{\otimes 2} - u_B^{\otimes 2}\|^2 = \|u_A^{\otimes 2}\|^2 + \|u_B^{\otimes 2}\|^2 - 2 \left(u_A^{\otimes 2} \right)^\top u_B^{\otimes 2}.$$

Die einzelnen Summanden lassen sich nun umformen:

$$\|u_A^{\otimes 2}\|^2 = \left(u_A^{\otimes 2} \right)^\top u_A^{\otimes 2} = \left(u_A^\top u_A \right)^2 = n^2 = \|u_B^{\otimes 2}\|^2,$$

und für $A, B \in \mathcal{A}$ hat man im dritten Summanden:

$$\left(u_A^{\otimes 2} \right)^\top u_B^{\otimes 2} = \left(u_A^\top u_B \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{4p} u_{A,i} u_{B,i} \right)^2$$

An dieser Stelle ist es hilfreich, einen Blick auf Abbildung 6 zu werfen, um sich zu verdeutlichen, wann $u_{A,i} u_{B,i} = 1$, und wann $u_{A,i} u_{B,i} = -1$ gilt für $i \in [4p]$. Man erhält für $|A \cap B| = s$ und wegen $|A| = |B| = 2p - 1$, dass

$$|A \setminus (A \cap B)| = |B \setminus (A \cap B)| = 2p - 1 - s.$$

Somit für den dritten Summanden die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{i=1}^{4p} u_{A,i} u_{B,i} \right)^2 &= \left((+1) \cdot (4p - 2|A \setminus (A \cap B)|) + (-1) \cdot (2|A \setminus (A \cap B)|) \right)^2 \\
 &= (4p - 4|A \setminus (A \cap B)|)^2 \\
 &= (4p - 4(2p - 1 - s))^2 \\
 &= (4(1 + s - p))^2 \geq 0,
 \end{aligned}$$

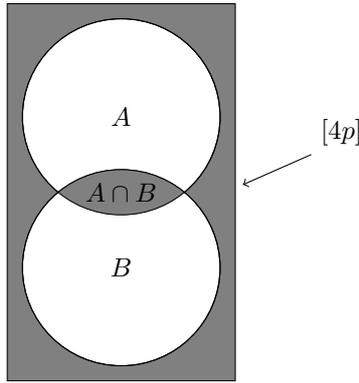


ABBILDUNG 6. Verdeutlichung von $u_A^T u_B$ für $A, B \in [4p]$. Alle Elemente im grauen Bereich werden addiert und die Elemente im weißen Bereich abgezogen.

Also gilt

$$(u_A^{\otimes 2})^T u_B^{\otimes 2} = 0 \iff |A \cap B| = p - 1.$$

Das heißt, der Abstand zwischen $u_A^{\otimes 2}$ und $u_B^{\otimes 2}$ wird am größten, wenn $|A \cap B| = p - 1$.

Aus Lemma 5.4 folgt nun: Falls \mathcal{A} in weniger als 1.09^n Teilmengen partitioniert wird, dann gibt es in einer dieser Teilmengen Vektoren $u_A^{\otimes 2}$, $u_B^{\otimes 2}$ mit

$$\|u_A^{\otimes 2} - u_B^{\otimes 2}\| = \text{diam} \left\{ u_A^{\otimes 2} : A \in \mathcal{A} \right\}.$$

Wähle nun n so groß, dass $1.09^n > n^2 + 1$. □

Die kleinste Dimension n^2 mit $1.09^n > n^2 + 1$ und $n = 4p$ ist $n^2 = 13456$. Was ist die kleinste Dimension, in der Borsuks Vermutung falsch ist?

- * Sie ist für $n = 2$ und $n = 3$ richtig (Eggleston, 1955 [4]).
- * Sie ist für $n = 65$ falsch (Bondarenko, Mai 2013 [2]).
- * Sie ist für $n = 64$ falsch (Jenrich, August 2013 [10]).

Literatur zu Kapitel 1

- [1] R. Ahlswede and L.H. Khachatrian, *The complete intersection theorem for systems of finite sets*, Europ. J. Combinatorics **18** (1997), 125–136.
- [2] A.V. Bondarenko, *On Borsuk's conjecture for two-distance sets*, preprint (2013).
- [3] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n -dimensionale Sphäre*, Fundamenta Mathematica **20** (1933), 177–190.
- [4] H.G. Egglestone, *Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter*, J. London Math. Society **30** (1955), 11–24.
- [5] D. Ellis, E. Friedgut, H. Pilpel, *Intersecting families of permutations*, Journal of the American Mathematical Society **24** (2011), 649–682.
- [6] P. Erdős, C. Ko, R. Rado, *Intersection theorems for systems of finite sets*, Quart. J. Math. Oxford **12** (1961) 313–320.
- [7] P. Frankl, *The Erdős-Ko-Rado Theorem is true for $n = ckt$* , Coll. Soc. Math. J. Bolyai **11** (1978), 365–375.
- [8] P. Frankl, R.M. Wilson, *Intersection theorems with geometric consequences*, Combinatorica **1** (1981), 357–368.
- [9] P. Frankl, R.M. Wilson, *The Erdős-Ko-Rado Theorem for vector spaces*, Journal of Combinatorial Theory **43** (1986), 228–236.
- [10] T. Jenrich, *A 64-dimensional two-distance counterexample to Borsuk's conjecture*, preprint (2013).
- [11] J. Kahn, G. Kalai, *A counterexample to Borsuk's conjecture*, Bulletin American Mathematical Society **29** (1993), 60–62.
- [12] G.O.H. Katona, *A simple proof of the Erdős-Chao Ko-Rado theorem*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **13** (1972), 183–184.
- [13] L. Lovász, *On the Shannon capacity of a graph*, IEEE Transactions on Information Theory **25** (1979), 1–7.
- [14] R.M. Wilson, *The exact bound on the Erdős-Ko-Rado Theorem*, Combinatorica **4** (1984), 247–257.

Gitterpunkt-Enumeration

Ein Gitter ist eine Menge von Punkten, die nicht beliebig nah aneinander liegen, und welche abgeschlossen unter Addition ist. In diesem Kapitel werden wir allerdings ausschließlich das Gitter \mathbb{Z}^n betrachten. Da aber viele Ergebnisse auch für alle Gitter bewiesen werden können, werden wir beide Begriffe verwenden.

Wir möchten nun der Frage nachgehen, auf welche Weise wir zu einer gegebenen Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ die Punkte $\mathbb{Z}^n \cap M$ aufzählen können. Außerdem wollen wir diese Punkte so darstellen, dass die Anzahl leicht abzulesen ist.

1. Polytope und Polyeder

Zu Beginn wiederholen wir einige fundamentale Definitionen und Ergebnisse aus der Geometrie.

DEFINITION 1.1. *Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, falls für je zwei Elemente aus M auch deren Verbindungsstrecke in M liegt, d.h. es gilt*

$$\forall x, y \in M \forall \alpha \in [0, 1] : \alpha x + (1 - \alpha)y \in M.$$

DEFINITION 1.2. *Eine Menge $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt (konvexes) Polytop, falls es eine endliche Menge $\{v_1, \dots, v_N\} \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt, so dass P die kleinste konvexe Menge ist, die $\{v_1, \dots, v_N\}$ enthält. P ist dann die Menge aller Konvexkombinationen von $\{v_1, \dots, v_N\}$, sprich*

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i v_i : \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \forall i \in [N] \right\}.$$

Man sagt, P ist die konvexe Hülle von $\{v_1, \dots, v_N\}$ und nutzt die Notation

$$P = \text{conv}\{v_1, \dots, v_N\}.$$

DEFINITION 1.3. *Die Dimension einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Dimension des kleinsten affinen Unterraums, der M enthält, das heißt*

$$\dim M = \dim \text{span } M = \dim\{x + \lambda(y - x) : x, y \in M, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

THEOREM (Carathéodory). *Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $y \in \text{conv}(A)$. Dann existieren affin unabhängige Punkte x_1, \dots, x_N , $N \in \mathbb{N}$, so dass $y \in \text{conv}\{x_1, \dots, x_N\}$ und $N \leq \dim A + 1 \leq n + 1$.*

DEFINITION 1.4. $H \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt (affine) Hyperebene, falls es ein $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und ein $\delta \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = \delta\}.$$

Die Mengen \mathbb{R}^n und \emptyset heißen degenerierte Hyperebenen. Weiterhin sind

$$H^+ := \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \geq \delta\} \quad \text{und} \quad H^- := \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \leq \delta\}$$

die durch H definierten Halbräume.

DEFINITION 1.5. $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Polyeder, falls P die Lösungsmenge eines endlichen linearen Ungleichungssystems ist, d.h. wenn es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ gibt, so dass gilt

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}.$$

Das nachfolgende Theorem beschreibt den genauen Zusammenhang zwischen Polyedern und Polytopen. Es zeigt, dass wir zwei fundamental verschiedene Möglichkeiten haben, diese Mengen zu beschreiben.

THEOREM (Minkowski-Weyl). *Es sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist P ein beschränktes Polyeder genau dann, wenn P ein Polytop ist.*

Wir listen nun noch einige Notationen und Eigenschaften für Polytope $P \subseteq \mathbb{R}^n$ auf:

- Man nennt S eine Seite von P , falls $S = P$ oder eine Hyperebene H existiert, so dass einerseits $S = P \cap H$ und andererseits $P \subseteq H^+$ oder $P \subseteq H^-$. Hiermit ist insbesondere auch \emptyset eine Seite von P .
- Nulldimensionale Seiten heißen Ecken.
- Eindimensionale Seiten heißen Kanten.
- $(n - 1)$ -dimensionale Seiten heißen Facetten.
- Falls $\dim P = n$ gilt, dann hat P mindestens $n + 1$ Ecken.
- Falls $\dim P = n$ gilt und P die Darstellung $P = \text{conv}\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ hat, so nennt man P einen n -Simplex.
- Falls alle Ecken von P ganzzahlig sind, so heißt P ganzzahlig.

2. Erste Beispiele

Wir wollen also bestimmen, wie viele Gitterpunkte in einem Polytop P liegen und auch, wie die Anzahl der Gitterpunkte von einer möglichen Skalierung von P abhängt. Hierfür betrachten wir zu P die Familie der Dilatationen

$$t \cdot P = \{(t \cdot x : x \in P)\}.$$

Im Folgenden beschränken wir uns auf ganzzahlige Polytope, also auch auf ganzzahlige Dilatationen. Es ist möglich, nahezu identische Ergebnisse auch für rationale Polytope zu erzielen, mit etwas zusätzlicher Notation. Dies wird zum Beispiel in [2] beschrieben, welches auch die Grundlage dieses Kapitels ist.

Wir definieren uns nun eine Funktion, welche die Anzahl der Gitterpunkte in P und all seiner Dilatationen berechnen soll:

DEFINITION 2.1. *Es bezeichnet $L_P : \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ die Funktion, die für ein festes Polytop P dem ganzzahligen Dilatationsfaktor t die Anzahl der Gitterpunkte in der Dilatation $t \cdot P$ zuordnet, also*

$$L_P(t) := |(t \cdot P) \cap \mathbb{Z}^n|.$$

In Abschnitt 4 werden wir feststellen, dass L_P ein Polynom ist. Doch bevor wir dies und andere Eigenschaften dieser Funktion beweisen, befassen wir uns erst einmal mit einführenden Beispielen, anhand derer sich Herangehensweisen verdeutlichen lassen.

2.1. Der Würfel. Der Einheitswürfel Q ist gegeben durch

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1 \forall i \in [n]\} = [0, 1]^n.$$

Q ist ein ganzzahliges Polytop. Die (ganzzahligen) Dilatationen von Q für $t \in \mathbb{Z}_{>0}$ haben die Form

$$t \cdot Q = \{t \cdot x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1 \forall i \in [n]\} = [0, t]^n,$$

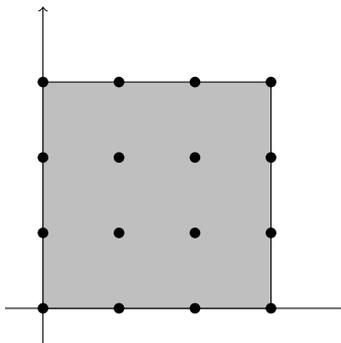


ABBILDUNG 1. Die Dilatation $3 \cdot Q$ von $Q \in \mathbb{R}^2$ mit Einzeichnung der Gitterpunkte.

also erhalten wir einen Würfel mit Kantenlänge t (siehe Abbildung 1).

Für den Einheitswürfel lässt sich leicht berechnen, wieviele Gitterpunkte in tQ liegen:

$$L_Q(t) = |(t \cdot Q) \cap \mathbb{Z}^n| = |[0, t]^n \cap \mathbb{Z}^n| = (t+1)^n.$$

L_Q ist offenbar ein Polynom in t und lässt sich als solches auf alle $t \in \mathbb{R}$ erweitern. Der binomische Lehrsatz liefert die zugehörigen Koeffizienten:

$$L_Q(t) = (t+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k.$$

An dieser Stelle könnte man das Beispiel als abgeschlossen ansehen. Wir können aber noch einen weiteren Effekt beobachten, den wir dann im Verlauf des Kapitels erklären werden.

Da wir L_P auch für nicht-ganzzahlige Mengen definieren können, können wir auch das Innere des Würfels untersuchen:

$$L_{Q^\circ}(t) = |(t \cdot Q^\circ) \cap \mathbb{Z}^n| = |(0, 1)^n \cap \mathbb{Z}^n| = (t-1)^n.$$

Auch L_{Q° lässt sich als Polynom auf $t \in \mathbb{R}$ erweitern und wir erhalten:

$$L_{Q^\circ}(t) = (t-1)^n = (-1)^n (-t+1)^n = (-1)^n L_Q(-t).$$

Wir werden im Abschnitt 5 näher auf dieses Verhalten eingehen.

2.2. Strecken in \mathbb{R}^2 . Es seien natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ gegeben, die relativ prim zueinander sind, also teilerfremd. Wir definieren

$$P = \left\{ (k, l) \in \mathbb{R}^2 : k, l \geq 0, ka + lb = 1 \right\}.$$

P ist also das Segment der Geraden $l(k) = \frac{1}{b} - \frac{a}{b}k$ im nichtnegativen Orthanten. P ist beschränkt, da die Steigung der Geraden negativ ist, und somit ist P ein Polytop. Im Allgemeinen ist P nicht ganzzahlig, da die Eckpunkte durch $(0, \frac{1}{b})$ und $(\frac{1}{a}, 0)$ gegeben sind.

Für die Dilatation mit Faktor t gilt:

$$\begin{aligned} tP &= \left\{ (k, l) \in \mathbb{R}^2 : k, l \geq 0, \frac{k}{t}a + \frac{l}{t}b = 1 \right\} \\ &= \left\{ (k, l) \in \mathbb{R}^2 : k, l \geq 0, ka + lb = t \right\}. \end{aligned}$$

Darum erhalten wir

$$L_P(t) = \left| \left\{ (k, l) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 : ka + lb = t \right\} \right|.$$

Mit anderen Worten bedeutet dies, dass $L_P(t)$ die Möglichkeiten zählt, t als nicht-negative, ganzzahlige Linearkombination von a und b zu schreiben.

Methode der erzeugenden Funktionen. Betrachte die geometrischen Reihen mit den Argumenten z^a und z^b :

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{ka} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^a)^k = \frac{1}{1-z^a} \quad \text{und}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} z^{lb} = \sum_{l=0}^{\infty} (z^b)^l = \frac{1}{1-z^b}.$$

Wenn wir nun diese beiden Reihen miteinander multiplizieren, so wird der Koeffizient von z^t ebenfalls gleich der Anzahl aller Möglichkeiten sein, t als nichtnegative ganzzahlige Linearkombination von a und b zu schreiben. Somit wissen wir, dass dieser Koeffizient gerade gleich $L_P(t)$ ist und erhalten

$$\left(\frac{1}{1-z^a}\right) \left(\frac{1}{1-z^b}\right) = \sum_{t \geq 0} L_P(t) z^t.$$

Anders ausgedrückt: $L_P(t)$ ist der konstante Term der Reihenschreibweise von

$$\frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)z^t}.$$

Da in dieser Reihe negative Exponenten vorkommen, können wir nicht einfach $z = 0$ einsetzen, um den konstanten Term zu bestimmen. Zumindest können wir aber diese Erkenntnis notationell festhalten und schreiben:

$$L_P(t) = \text{const} \left(\frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)z^t} \right).$$

Mit ein paar Tricks lässt sich dieser Term dennoch explizit bestimmen. Es sei $b^{-1} \in \mathbb{Z}$, so dass $b^{-1}b = 1 \pmod{a}$ und es sei $a^{-1} \in \mathbb{Z}$, so dass $a^{-1}a = 1 \pmod{b}$. Dann erhält man den folgenden Satz:

THEOREM (Popoviciu, 1953 [6]).

$$L_P(t) = \frac{t}{ab} - \left\{ \frac{b^{-1}t}{a} \right\} - \left\{ \frac{a^{-1}t}{b} \right\} + 1,$$

wobei für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

2.3. Der Simplex. Wir fixieren für diesen Abschnitt den *Standard- n -Simplex* als

$$\Delta := \text{conv}\{e_1, \dots, e_n, 0\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1 \right\}.$$

Mit Dilatationsfaktor t erhalten wir den Simplex

$$t \cdot \Delta = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i \leq t \right\},$$

wovon wir ablesen können dass

$$L_{\Delta}(t) = \left| \left\{ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n : \sum_{i=1}^n m_i \leq t \right\} \right|.$$

Weiter gilt, dass für jedes $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ auch die Differenz $(t - (\sum_{i=1}^n m_i))$ eine nichtnegative ganze Zahl ist, weshalb wir mit einer Spielraumvariablen die Gitterpunkte alternativ zählen können durch

$$L_{\Delta}(t) = \left| \left\{ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} m_i = t \right\} \right|.$$

Auf diese Form lässt sich nun wieder die Methode der erzeugenden Funktionen anwenden, denn im Produkt von $n+1$ geometrischen Reihen zählt der Koeffizient von z^t wieder die Möglichkeiten, t als Summe von $n+1$ nichtnegativen, ganzen Zahlen darzustellen. Somit erhalten wir

$$L_{\Delta}(t) = \text{const} \left(\left(\sum_{m_1 \geq 0} z^{m_1} \right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{m_{n+1} \geq 0} z^{m_{n+1}} \right) \cdot z^{-t} \right) = \text{const} \left(\frac{1}{(1-z)^{n+1} \cdot z^t} \right).$$

Nun gilt (siehe Übungsaufgabe 4.3)

$$(2) \quad \frac{1}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{n} z^k.$$

Durch diese Gleichung ist es nun möglich, den konstanten Term explizit zu bestimmen und wir erhalten schließlich die Anzahl der Gitterpunkte von Δ :

$$L_{\Delta}(t) = \text{const} \left(z^{-t} \cdot \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{n} z^k \right) = \binom{n+t}{n}.$$

Gitterpunkte im Inneren des Simplex. Für den Standard- n -Simplex Δ erkennt man recht schnell, dass es keine inneren Gitterpunkte gibt. Das wirft die Frage auf, wie weit man Δ dilatieren muss, damit man überhaupt innere Gitterpunkte hat.

Um in den nachfolgenden Ergebnissen die Notation zu vereinfachen, verwenden wir eine allgemeinere Definition des Binomialkoeffizienten: Für $m \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ definieren wir

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-k+2)(m-k+1)}{k!} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (m-i)}{k!}.$$

Es ist nicht schwer zu sehen, dass dies für $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ mit der üblichen Definition des Binomialkoeffizienten übereinstimmt.

Für das Inneren von Δ gilt nun:

$$t \cdot \Delta^{\circ} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i < t \right\},$$

woraus mit analogen Beobachtungen wie bei Δ folgt:

$$\begin{aligned}
L_{\Delta^\circ}(t) &= \left| \left\{ m \in \mathbb{Z}_{>0}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} m_i = t \right\} \right| \\
&= \text{const} \left(\left(\sum_{m_1 > 0} z^{m_1} \right) \cdots \left(\sum_{m_{n+1} > 0} z^{m_{n+1}} \right) \cdot z^{-t} \right) \\
&= \text{const} \left(\left(\frac{z}{1-z} \right)^{n+1} \cdot z^{-t} \right) \\
&= \text{const} \left(z^{n+1-t} \cdot \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{n} z^k \right) \\
&= \binom{n - (n+1-t)}{n} = \binom{t-1}{n}.
\end{aligned}$$

Insbesondere kann man hieran auch ablesen, dass erst für $t \geq n$ Gitterpunkte im Inneren des Standard n -Simplex liegen.

BEMERKUNG. Fasst man L_{Δ° und L_Δ als Polynome in \mathbb{R} auf, so erhält man wie schon für den Würfel den Zusammenhang

$$L_{\Delta^\circ}(t) = \binom{t-1}{n} = (-1)^n \binom{n-t}{n} = (-1)^n L_\Delta(-t).$$

3. Der Satz von Pick

Der österreichische Mathematiker Georg Alexander Pick veröffentlichte 1899 ein Ergebnis über zweidimensionale, ganzzahlige Polytope, welches einen geometrischen Zusammenhang zwischen der Fläche des Polytops und dessen Gitterpunkten offenbart, und welches wir hier nachvollziehen wollen.

Wir führen dafür zunächst ein paar Notationen ein: Es sei $P \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Polytop, dann schreiben wir

- A für die Fläche von P ;
- I für die Anzahl der inneren Gitterpunkte von P , d.h.

$$I = |P^\circ \cap \mathbb{Z}^2|;$$

- B für die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand von P , d.h.

$$B = |P \cap \mathbb{Z}^2| - I.$$

SATZ 3.1 (Pick, 1899 [5]). *Es sei $P \subseteq \mathbb{R}^2$ ein ganzzahliges Polytop. Dann gilt*

$$A = I + \frac{1}{2}B - 1.$$

Damit ist die Anzahl aller Gitterpunkte eines Polytops P in der Ebene komplett bestimmt durch seine Fläche und die Gitterpunkte auf dem Rand:

$$L_P(1) = I + B = A + \frac{1}{2}B + 1.$$

Dies ist in höheren Dimensionen nicht der Fall. Schon in Dimension 3 lässt sich beispielsweise leicht eine Familie von Simplizes konstruieren, deren einzige Gitterpunkte die Ecken sind, und deren Volumen beliebig groß wird.

BEWEIS VON SATZ 3.1. Der Beweis ist in drei Schritte aufgeteilt. Zunächst zeigen wir, dass wir die Aussage nur für ganzzahlige Dreiecke beweisen müssen. Danach argumentieren wir, dass es auch ausreicht, spezielle Recht- und Dreiecke zu betrachten. Diese Spezialfälle lassen sich dann elementar erledigen (siehe Übungsaufgabe 4.4).

Es sei P kein Dreieck und seien v_1 und v_2 zwei Ecken, die keine gemeinsame Kante haben, also nicht „benachbart“ sind. Wenn wir P trennen durch eine neue Kante zwischen v_1 und v_2 , so erhalten wir zwei neue Polytope P_1 und P_2 mit jeweils weniger Ecken als P (Abbildung 2).

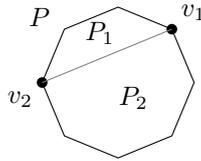


ABBILDUNG 2. „Zerschneiden“ von P .

Bezeichne die Fläche, die Anzahl der inneren Gitterpunkte und die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand von P_k mit A_k , I_k und B_k für $k \in \{1, 2\}$. Angenommen, wir können zeigen, dass Satz 3.1 für P_1 und P_2 gilt. Es ist dann $A = A_1 + A_2$. Es sei L die Anzahl der Gitterpunkte auf der Kante zwischen v_1 und v_2 . Dann folgt

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + L - 2, \\ B &= B_1 + B_2 - 2L + 2. \end{aligned}$$

Mit diesen Werten gilt:

$$\begin{aligned} I + \frac{1}{2}B - 1 &= I_1 + I_2 + L - 2 + \frac{1}{2}(B_1 + B_2 - 2L + 2) - 1 \\ &= I_1 + \frac{1}{2}B_1 - 1 + I_2 + \frac{1}{2}B_2 - 1 \\ &= A_1 + A_2 = A. \end{aligned}$$

Da jedes Polytop triangulierbar ist (z.B. durch Festhalten einer Ecke v und Einfügen aller Verbindungsstrecken zu Ecken, mit denen v nicht bereits eine Kante besitzt), genügt es durch rekursives Anwenden dieses Arguments, den Satz für ganzzahlige Dreiecke nachzuweisen.

Jedes ganzzahlige Dreieck kann (bis auf Rotation) in eine von zwei Arten in ein ganzzahliges achsenparalleles Rechteck eingebettet werden (Abbildung 3). Hierbei erkennt man, dass sich die Fläche und Gitterpunkte des Dreiecks als Differenz der Fläche und Gitterpunkte des umgebenden ganzzahligen Rechtecks mit Flächen von ganzzahligen, achsenparallelen Recht- und Dreiecken ergibt.

Dies führt analog zur obigen Reduktion darauf, dass man den Satz von Pick nur für ganzzahlige, achsenparallele Recht- und Dreiecke zeigen muss. Die Ausführung hiervon ist der Inhalt von Übungsaufgabe 4.4 (a). \square

BEMERKUNG. Übungsaufgabe 4.4 (b) erweitert die Aussage von Pick auf Dilatationen von P und wir erhalten für Polytope in der Ebene:

$$L_P(t) = t^2A + \frac{1}{2}tB + 1.$$

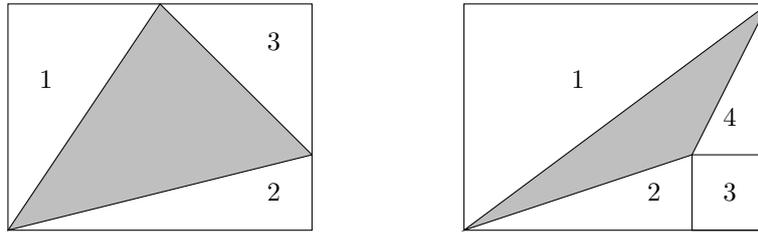


ABBILDUNG 3. Zwei Typen von Dreiecken und ihre Einbettung in achsenparallele Rechtecke.

4. Ehrhart-Theorie

In diesem Abschnitt werden wir den Satz von Ehrhart für ganzzahlige Polytope P beweisen, der besagt, dass für P mit Dimension n die Funktion $L_P(t)$ ein Polynom in t von Grad n ist. Eugène Ehrhart war ein französischer Mathematiker aus dem Elsass, der in den 1960er Jahren zu diesem Ergebnis kam. Zu seinen Ehren nennt man L_P auch das *Ehrhart-Polynom von P* .

Für den Beweis sind Reduktionstechniken nötig, die in gewisser Weise schon im Beweis vom Satz von Pick (Satz 3.1) verwendet worden. Dort war es der wesentliche Schritt, das zweidimensionale Polytop in Dreiecke einzuteilen, wir haben also eine Triangulierung in 2-Simplizes vorgenommen. Diese Idee verallgemeinern wir nun für n -dimensionale Polytope.

4.1. Reduktion auf Simplizes.

DEFINITION 4.1. *Eine Triangulierung eines Polytops P mit Dimension n ist eine endliche Familie T von n -Simplizes, so dass gilt:*

- (a) P ist die Vereinigung aller Simplizes in T , d.h.

$$P = \bigcup_{\Delta \in T} \Delta.$$

- (b) Der Schnitt zweier Simplizes in T ist Seite beider Simplizes, d.h.

$$\forall T_1, T_2 \in T : T_1 \cap T_2 \text{ ist Seite von } T_1 \text{ und } T_2.$$

P ist ohne neue Ecken triangulierbar, falls es eine Triangulierung T von P gibt, so dass für jedes $\Delta \in T$ die Ecken von Δ auch Ecken von P sind.

SATZ 4.2. *Jedes Polytop $P \in \mathbb{R}^n$ ist ohne neue Ecken triangulierbar.*

BEWEISIDEE: Die Idee ist eine sogenannte Hochhebung (engl: lifting) des Polytops in Dimension $n + 1$. Hierfür wähle für jede Ecke von P eine zufällige (positive) Höhe in der zusätzlichen Koordinate und betrachte anschließend die konvexe Hülle der neuen Punkte. Jede Facette des neuen Polytops ist mit Wahrscheinlichkeit 1 ein Simplex (sonst wären $n + 1$ neue Punkte auf einer Hyperebene). Betrachte die Facetten, die von Punkten in der Projektion auf die Ebene $\mathbb{R}^n \times 0$ „zu sehen“ sind. Die Projektion dieser Facetten sind eine Triangulierung ohne neue Ecken. \square

In Bezug auf Triangulierungen gibt es überraschend viele grundlegende, offene Fragen, unter anderem:

- Wie viele Triangulierungen ohne neue Ecken gibt es für ein festes P ?
- Wie viele Elemente hat die kleinste Triangulierung ohne neue Ecken für den n -Würfel mit $n \geq 8$?

DEFINITION 4.3. Ein (endlich erzeugter) spitzer (affiner) Kegel $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist von der Form

$$K = \left\{ v + \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i : \lambda_i \geq 0 \forall i \in [m] \right\},$$

wobei $v, w_1, \dots, w_m \in \mathbb{R}^n$, so dass es eine Hyperebene H gibt mit $H \cap K = \{v\}$ und $K \setminus \{v\}$ liegt ganz in H^+ oder H^- .

Die (einzige) Ecke v von K heißt auch *Spitze* von K und die w_i , $i \in [m]$ heißen *Generatoren* von K . K heißt *rational*, falls die Spitze und alle Generatoren von K rationale Vektoren sind. Insbesondere kann ein rationaler Kegel auch (durch entsprechende Skalierung) von ganzzahligen Generatoren erzeugt werden. Die Dimension von K ist wiederum wie bei Polytopen die Dimension des kleinsten affinen Unterraums, der K enthält.

DEFINITION 4.4. Ein Kegel K mit Dimension n heißt *simplicial*, falls K genau n Generatoren hat, und diese linear unabhängig sind.

Ähnlich wie der n -Simplex die minimale Anzahl von Ecken hat, die ein n -dimensionales Polytop haben kann, hat ein simplicialer Kegel die minimale Anzahl von Generatoren.

Jeder Kegel ist ein Polyeder und lässt sich daher als Lösungsmenge eines endlichen Ungleichungssystems auffassen. Ein rationaler n -Kegel ist der Schnitt endlich vieler Halbräume H der Form

$$H = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b \right\}$$

mit $a \in \mathbb{Z}^n$ und $b \in \mathbb{Z}$. Alle dazugehörigen Hyperebenen treffen sich in genau einem Punkt, nämlich der Spitze.

Wir wollen nun Kegel verwenden, um Polytope und ihre Dilatationen in einem Objekt zu repräsentieren. Es sei hierfür $P = \text{conv}\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polytop der Dimension n . Definiere für $i \in [m]$ die Vektoren

$$w_i := (v_i, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Dann ist der *Kegel über P* gegeben durch

$$\text{cone}(P) := \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i : \lambda_i \geq 0 \forall i \in [m] \right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Insbesondere können wir hiervon leicht ablesen dass

$$\text{cone}(P) \cap \{x_{n+1} = 1\} = \{(x, 1) : x \in P\}.$$

LEMMA 4.5. $\text{cone}(P) \cap \{x_{n+1} = t\} = \{(x, t) : x \in tP\}$

BEWEIS. Meditation über Abbildung 4.1. □

Da Kegel (unbeschränkte) Polyeder sind, können wir auch hier von Seiten, und im Speziellen von Facetten, Kanten und Ecken sprechen. Die einzige Ecke ist hierbei wie schon erwähnt die Spitze. Analog zu Polytopen definieren wir ausserdem:

DEFINITION 4.6. Eine Familie T von simplicialen n -Kegeln heißt *Triangulierung eines n -Kegels K* , falls gilt:

- (a) K ist die Vereinigung aller simplicialer Kegel in T , d.h.

$$K = \bigcup_{S \in T} S$$

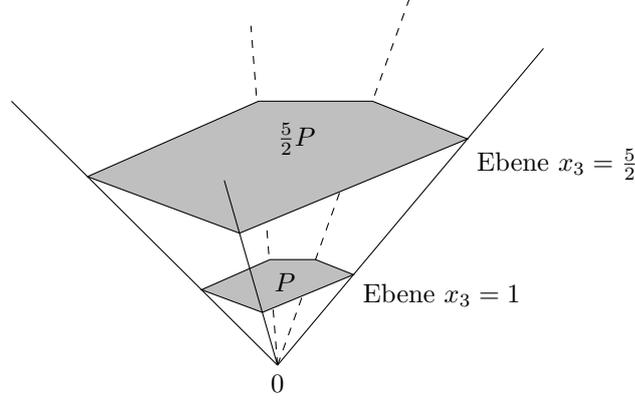


ABBILDUNG 4. Kegel über einem Fünfeck mit Einzeichnung einer Dilatation.

- (b) *Der Schnitt zweier simplizialer Kegel in T ist Seite beider simplizialer Kegel, d.h.*

$$\forall T_1, T_2 \in T : T_1 \cap T_2 \text{ ist Seite von } T_1 \text{ und } T_2.$$

K ist ohne neue Generatoren triangulierbar, falls es eine Triangulierung T gibt, so dass die Generatoren jedes $S \in T$ auch Generatoren von K sind.

SATZ 4.7. *Jeder Kegel K ist ohne neue Generatoren triangulierbar.*

BEWEIS. Ohne Einschränkung verschieben wir die Spitze auf den Nullpunkt, $v = 0$. Es sei $\dim K = n$ und $H \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene mit $H \cap K = \{v\}$. Verschiebe H nun parallel so, dass sie K im Inneren schneidet. Dieser Schnitt ist ein Polytop P mit $\dim P = n - 1$. Nach Satz 4.2 existiert eine Triangulierung T_P ohne neue Ecken. Für jedes $\Delta_i \in T_P$ mit $\Delta_i = \text{conv}\{v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\}$ betrachte den Kegel über Δ_i

$$S_i := \text{cone}(\Delta_i) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k v_{i_k} : \lambda_k \geq 0 \forall k \in [n] \right\}.$$

Dann ist S_i ein simplizialer Kegel und die Menge $\{S_i : \Delta_i \in T_P\}$ ist eine Triangulierung ohne neue Generatoren. \square

Wir definieren zu einer Menge $S \in \mathbb{R}^n$ die *erzeugende Funktion der Gitterpunkte in S* :

$$\sigma_S(z) = \sum_{m \in S \cap \mathbb{Z}^n} z^m,$$

wobei die Multiindexnotation $z^m := \prod_{i=1}^n z_i^{m_i}$ verwendet wird.

SATZ 4.8. *Es sei K ein rationaler, simplizialer Kegel der Dimension n mit Spitze 0, gegeben durch*

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i : \lambda_i \geq 0 \forall i \in [n] \right\}$$

mit $w_i \in \mathbb{Z}^n$ für alle $i \in [n]$. Dann gilt für jedes $v \in \mathbb{R}^n$

$$\sigma_{v+K}(z) = \frac{\sigma_{v+\Pi}(z)}{\prod_{i=1}^n (1 - z^{w_i})},$$

wobei

$$\Pi = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i : \lambda_i \in [0, 1) \forall i \in [n] \right\}.$$

Hierbei nennt man Π das *fundamentale Parallelepiped* von K .

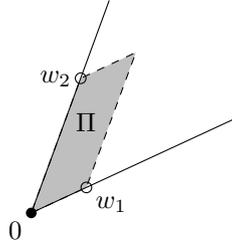


ABBILDUNG 5. Beispiel eines fundamentalen Parallelepipeds im \mathbb{R}^2 .

BEWEIS VON SATZ 4.8. Es sei $m \in (v + K) \cap \mathbb{Z}^n$. Dann hat m die Darstellung

$$m = v + \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i.$$

Da K simplizial ist, also die Generatoren w_i linear unabhängig sind, ist diese Darstellung von m eindeutig. Nun lässt sich jedes Skalar λ_i aufteilen in den ganzzahligen Anteil $\lfloor \lambda_i \rfloor$ und den Rest $\{\lambda_i\} = \lambda_i - \lfloor \lambda_i \rfloor$ und wir erhalten die wiederum eindeutige Darstellung

$$m = v + \underbrace{\sum_{i=1}^n \{\lambda_i\} w_i}_{=: p \in (v + \Pi) \cap \mathbb{Z}^n} + \sum_{i=1}^n \lfloor \lambda_i \rfloor w_i.$$

Hierbei gilt $p \in \mathbb{Z}^n$, da m und $\sum_{i=1}^n \lfloor \lambda_i \rfloor w_i$ ganzzahlig sind.

Andererseits gilt durch n -faches Umschreiben in eine geometrische Reihe:

$$\frac{\sigma_{v+\Pi}(z)}{\prod_{i=1}^n (1 - z^{w_i})} = \left(\sum_{p \in (v+\Pi) \cap \mathbb{Z}^n} z^p \right) \left(\sum_{k_1 \geq 0} z^{k_1 w_1} \right) \cdots \left(\sum_{k_n \geq 0} z^{k_n w_n} \right).$$

Multipliziert man diese Reihen aus, so hat jeder Exponent die Form

$$p + \sum_{i=1}^n k_i w_i \in (v + K) \cap \mathbb{Z}^n$$

□

BEMERKUNG. Geometrisch betrachtet hat man den Kegel $v + K$ mit affinen Kopien des fundamentalen Parallelepipeds $v + \Pi$ gekachelt. Die Essenz des Satzes ist, dass die gesamte Schwierigkeit des Berechnens von σ_{v+K} schon in der Position der Gitterpunkte von $v + \Pi$ enthalten ist.

KOROLLAR 4.9. *Es sei K wie in Satz 4.8 und $v \in \mathbb{R}^n$, so dass der Rand von $v + K$ keine Gitterpunkte enthält. Dann ist die Aussage von Satz 4.8 auch gültig, wenn das fundamentale Parallelepiped Π ersetzt wird durch das offene fundamentale Parallelepiped*

$$\Pi^\circ = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i : \lambda_i \in (0, 1) \forall i \in [n] \right\}.$$

BEWEIS. Analog zum vorangegangenen Beweis. \square

KOROLLAR 4.10. Für jeden Kegel K ist $\sigma_K(z)$ eine rationale Funktion in den Koordinaten von z .

BEWEIS. Betrachte eine Triangulierung ohne neue Generatoren von K . Nach Übungsaufgabe 5.1 und Satz 4.8 können wir für alle Elemente der Triangulierung und alle Seiten der Elemente die erzeugende Funktion ihrer Gitterpunkte als rationale Funktion schreiben. Diese können wir mit dem Inklusion-Exklusion-Prinzip addieren und erhalten $\sigma_K(z)$. \square

4.2. Der Satz von Ehrhart. Nach dieser Vorarbeit wollen wir den Satz von Ehrhart formulieren und anschließend zwei Hilfssätze für den Beweis erörtern.

SATZ 4.11 (Ehrhart, 1962 [3]). Es sei P ein ganzzahliges Polytop mit Dimension n . Dann ist $L_P(t)$ ein Polynom in t vom Grad n .

Wie bereits erwähnt, nennt man L_P das Ehrhart-Polynom von P . Der erste benötigte Hilfssatz gibt eine Charakterisierung von Potenzreihen über Polynomen:

LEMMA 4.12. Es sei die Gleichung

$$\sum_{t \geq 0} f(t)z^t = \frac{g(z)}{(1-z)^{n+1}}$$

erfüllt. Dann sind folgende zwei Aussagen äquivalent:

- (i) f ist ein Polynom in t vom Grad n .
- (ii) g ist ein Polynom in z vom Grad höchstens n und $g(1) \neq 0$.

BEWEIS. Es sei f ein Polynom in t vom Grad n , also

$$f(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i \quad \text{mit } a_n \neq 0.$$

Dann gilt

$$\sum_{t \geq 0} f(t)z^t = \sum_{i=0}^n \left(a_i \sum_{t \geq 0} t^i z^t \right).$$

An dieser Stelle nutzen wir eine Blackbox:

Für die Euler-Zahlen $\langle n \rangle_k$ gilt

$$\sum_{t \geq 0} t^n z^t = \frac{\sum_{k=0}^n \langle n \rangle_k z^k}{(1-z)^{n+1}}.$$

Hierbei bezeichnet $\langle n \rangle_k$ die Anzahl derer Permutationen in \mathcal{S}_n , so dass genau k Elemente größer als ihr Vorgänger sind.

Angewendet auf unsere Situation bekommen wir somit:

$$\sum_{t \geq 0} f(t)z^t = \sum_{i=0}^n \left(a_i \frac{\sum_{k=0}^i \langle i \rangle_k z^k}{(1-z)^{i+1}} \right) = \frac{\sum_{i=0}^n (a_i (1-z)^{n-i} \sum_{k=0}^i \langle i \rangle_k z^k)}{(1-z)^{n+1}}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Funktion im Zähler ein Polynom von Grad höchstens n ist, und an der Stelle $z = 1$ ungleich Null ist, da $a_n \neq 0$.

Andersherum gilt mit der Gleichheit aus (2)

$$\begin{aligned}
\frac{g(z)}{(1-z)^{n+1}} &= \sum_{t \geq 0} g(z) \binom{n+t}{n} z^t \\
&= \sum_{t \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n c_k z^k \right) \binom{n+t}{t} z^t \\
&= \sum_{t \geq k} \sum_{k=0}^n c_k \binom{n+t-k}{n} z^t \\
&= \sum_{t \geq 0} \sum_{k=0}^n c_k \binom{n+t-k}{n} z^t.
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich mit der Gleichung aus der Voraussetzung liefert somit

$$f(t) = \sum_{k=0}^n c_k \binom{n+t-k}{n}.$$

Die Binomialkoeffizienten $\binom{n+t-k}{n}$ können für alle $k \in \{0, \dots, n\}$ als Polynome in t von Grad n aufgefasst werden, die jeweils Leitkoeffizienten 1 haben. Wegen

$$0 \neq g(1) = \sum_{k=0}^n c_k$$

ist dann f ein Polynom von Grad n , denn f hat Leitkoeffizienten $\sum_{k=0}^n c_k$. \square

Der zweite Hilfssatz zeigt einen Zusammenhang zwischen der erzeugenden Funktion der Gitterpunkte in $\text{cone}(P)$ und dem Ehrhart-Polynom von P auf.

LEMMA 4.13. *Es gilt die Gleichheit*

$$\sigma_{\text{cone}(P)}(1, \dots, 1, z) = 1 + \sum_{t \geq 1} L_P(t) z^t.$$

BEWEIS. Allgemein haben wir die erzeugende Funktion $\sigma_S(z)$ für $S \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert als

$$\sigma_S(z) = \sum_{m \in S \cap \mathbb{Z}^n} z^m.$$

Also folgt für beschränktes S :

$$\sigma_S(\mathbf{1}) = \sum_{m \in S \cap \mathbb{Z}^n} \mathbf{1}^m = \sum_{m \in S \cap \mathbb{Z}^n} 1 = |S \cap \mathbb{Z}^n| = L_S(1).$$

In Lemma 4.5 haben wir gesehen, dass wir tP in $\text{cone}(P)$ wiederfinden durch Schnitt mit der Ebene $x_{n+1} = t$. Das heißt, wir können $\sigma_{\text{cone}(P)}$ anders summieren, indem wir anhand von z_{n+1}^t sortieren:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\text{cone}(P)}(z_1, \dots, z_{n+1}) &= \sum_{m \in \text{cone}(P) \cap \mathbb{Z}^{n+1}} (z_1, \dots, z_{n+1})^m \\
&= \sum_{\hat{m} \in tP \cap \mathbb{Z}^n, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (z_1, \dots, z_n)^{\hat{m}} \cdot z_{n+1}^t \\
&= 1 + \sum_{t \geq 1} \sigma_{tP}(z_1, \dots, z_n) \cdot z_{n+1}^t
\end{aligned}$$

Somit haben wir die erzeugende Funktion einer unbeschränkten Menge ausgedrückt durch eine Reihe, in der nur erzeugende Funktionen von beschränkten Mengen vorkommen. Weiter folgt:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{cone}(P)}(1, \dots, 1, z_{n+1}) &= 1 + \sum_{t \geq 1} \sigma_{tP}(\mathbf{1}) z_{n+1}^t \\ &= 1 + \sum_{t \geq 1} L_P(t) z_{n+1}^t.\end{aligned}$$

□

BEWEIS VON SATZ 4.11. Mit dem Inklusion-Exklusion-Prinzip reicht es, den Satz für Simplexe zu zeigen. Nach Lemma 4.12 genügt es ausserdem nachzuweisen, dass für jeden ganzzahligen n -Simplex $\Delta = \text{conv}\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$

$$1 + \sum_{t \geq 1} L_{\Delta} z^t = \frac{g(z)}{(1-z)^{n+1}}$$

für ein Polynom g mit Grad höchstens n und $g(1) \neq 0$ erfüllt ist.

Betrachte den simplizialen Kegel $\text{cone}(\Delta)$ mit Spitze 0 und Generatoren $w_i = (v_i, 1) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $i \in [n+1]$. Nach Satz 4.8 gilt

$$\sigma_{\text{cone}(\Delta)}(z) = \frac{\sigma_{\Pi}(z)}{\prod_{i=1}^{n+1} (1 - z^{w_i})},$$

wobei wieder

$$\Pi = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i w_i : \lambda_i \in [0, 1] \forall i \in [n+1] \right\}$$

das fundamentale Parallelepiped zu $\text{cone}(\Delta)$ ist.

Da Π beschränkt ist, ist $\sigma_{\Pi}(z) = \sum_{m \in \Pi \cap \mathbb{Z}^{n+1}} z^m$ ein Polynom in z_1, \dots, z_{n+1} . Betrachte den Grad in z_{n+1} : Da die letzte Koordinate der Generatoren w_i immer 1 ist, gilt für jedes $m \in \Pi \cap \mathbb{Z}^{n+1}$

$$m_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i < \sum_{i=1}^{n+1} 1 = n+1,$$

und da m_{n+1} ganzzahlig ist, gilt sogar

$$m_{n+1} \leq n.$$

Das bedeutet, dass der Grad von $\sigma_{\Pi}(1, \dots, 1, z_{n+1})$ höchstens n ist. Da zumindest $0 \in \Pi$ ein Gitterpunkt ist, gilt

$$\sigma_{\Pi}(\mathbf{1}) = |\Pi \cap \mathbb{Z}^{n+1}| \neq 0.$$

Zu guter Letzt ist

$$\sigma_{\text{cone}(\Delta)}(1, \dots, 1, z_{n+1}) = \frac{\sigma_{\Pi}(1, \dots, 1, z_{n+1})}{(1 - z_{n+1})^{n+1}}.$$

Mit Lemma 4.13 haben wir genau die gewünschte Form erfüllt und es folgt die Behauptung. □

4.3. Die Ehrhart-Reihe. Die in Lemma 4.13 erstmals auftretende Reihe

$$1 + \sum_{t \geq 1} L_P(t) z^t =: \text{Ehr}_P(z)$$

heißt *Ehrhart-Reihe*. Um mehr über die Form der Ehrhart-Polynome zu erfahren, werden wir uns in diesem Abschnitt mit der Ehrhart-Reihe auseinandersetzen.

KOROLLAR 4.14. *Es sei $\Delta = \text{conv}\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ ein ganzzahliger n -Simplex mit $\dim \Delta = n$ und sei $w_j := (v_j, 1)$, $i \in [n+1]$. Dann ist*

$$\text{Ehr}_\Delta(z) = 1 + \sum_{t \geq 1} L_\Delta(t) z^t = \frac{\sum_{k=0}^n h_k z^k}{(1-z)^{n+1}},$$

wobei h_k die Anzahl der Gitterpunkte m in

$$\Pi = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i w_i : \lambda_i \in [0, 1] \forall i \in [n+1] \right\}$$

mit $m_{n+1} = k$ ist.

BEWEIS. Im Beweis von Satz 4.11 haben wir gesehen, dass

$$\text{Ehr}_\Delta(z) = \sigma_{\text{cone}(\Delta)}(1, \dots, 1, z_{n+1}) = \frac{\sigma_\Pi(1, \dots, 1, z_{n+1})}{(1-z_{n+1})^{n+1}}$$

und

$$\sigma_\Pi(1, \dots, 1, z) = \sum_{m \in \Pi \cap \mathbb{Z}^{n+1}} 1^{m_1} \cdot \dots \cdot 1^{m_n} \cdot z^{m_{n+1}} = \sum_{m \in \Pi \cap \mathbb{Z}^{n+1}} z^{m_{n+1}} = \sum_{k=0}^n h_k z^k,$$

wobei die h_k genau die behauptete Form haben. \square

Im Allgemeinen gibt es leider keine so schöne Interpretation der Koeffizienten h_k , allerdings kann man zeigen, dass für jedes ganzzahlige Polytop P gilt

$$\text{Ehr}_P(z) = \frac{\sum_{k=0}^n h_k z^k}{(1-z)^{n+1}},$$

wobei die h_k ganzzahlig sind. Wir bekommen sogar noch etwas mehr:

SATZ 4.15 (Stanley's Nichtnegativitätssatz, 1980 [8]). *Es sei P ein ganzzahliges Polytop der Dimension n . Dann gilt*

$$\text{Ehr}_P(z) = \frac{\sum_{k=0}^n h_k z^k}{(1-z)^{n+1}},$$

wobei $h_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ für jedes $k \in [n+1]$.

BEWEIS. Als Erstes triangulieren wir $\text{cone}(P) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ohne neue Generatoren in simpliziale Kegel K_1, \dots, K_m .

Nach Übungsaufgabe 5.4 finden wir einen Vektor $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, so dass $\text{cone}(P) \cap \mathbb{Z}^{n+1} = (v + \text{cone}(P)) \cap \mathbb{Z}^{n+1}$ und weder die Facetten von $v + \text{cone}(P)$ noch die Facetten von $v + K_1, \dots, v + K_m$ Gitterpunkte enthalten. Das bedeutet, jeder Gitterpunkt in $v + \text{cone}(P)$ liegt im Inneren von genau einem Kegel $v + K_j$, und somit

$$\text{cone}(P) \cap \mathbb{Z}^{n+1} = (v + \text{cone}(P)) \cap \mathbb{Z}^{n+1} = \bigcup_{j=1}^m \left((v + K_j) \cap \mathbb{Z}^{n+1} \right),$$

wobei die Vereinigung disjunkt ist. Übertragen auf die erzeugende Funktionen heißt das

$$\sigma_{\text{cone}(P)}(z) = \sum_{j=1}^m \sigma_{v+K_j}(z).$$

Mit Lemma 4.13 erhalten wir

$$\text{Ehr}_P(z) = \sigma_{\text{cone}(P)}(1, \dots, 1, z) = \sum_{j=1}^m \sigma_{v+K_j}(1, \dots, 1, z).$$

Diese Summanden können wir mit Hilfe von Korollar 4.9 umformen:

$$\sigma_{v+K_j}(1, \dots, 1, z) = \frac{\sigma_{v+\Pi_j^\circ}(1, \dots, 1, z)}{(1-z)^{n+1}},$$

wobei

$$\Pi_j^\circ = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i w_{j_i} : \lambda_i \in (0, 1) \forall i \in [n] \right\}$$

und w_{j_i} sind die linear unabhängigen Generatoren von K_j . Die Aussage folgt nun mit Korollar 4.14. \square

BEMERKUNG. Damit haben wir nebenbei eine geometrische Begründung gefunden, wieso $\text{Ehr}_P(z)$ mit konstantem Term 1 beginnt: Die Null liegt in genau einem $v + K_j$, das heißt, es gibt nur genau einen Beitrag zu $\frac{1}{(1-z)^{n+1}}$ in $\text{Ehr}_P(z)$, alle anderen Terme haben höhere Exponenten im Zähler. Insbesondere gilt also $h_0 = 1$.

LEMMA 4.16. *Es sei P ein ganzzahliges Polytop mit Dimension n und sei seine Ehrhart-Reihe gegeben durch*

$$\text{Ehr}_P(z) = \frac{\sum_{k=0}^n h_k z^k}{(1-z)^{n+1}}.$$

Dann gilt

$$(3) \quad L_P(t) = \sum_{k=0}^n h_k \binom{t+n-k}{n}.$$

BEWEIS. Die Behauptung lässt sich einfach nachrechnen:

$$\begin{aligned} \text{Ehr}_P(z) &= \frac{\sum_{k=0}^n h_k z^k}{(1-z)^{n+1}} \\ &= \sum_{k=0}^n h_k z^k \sum_{t \geq 0} \binom{t+n}{n} z^t \\ &= \sum_{k=0}^n \left(h_k \sum_{t \geq 0} \binom{t+n}{n} z^{t+k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(h_k \sum_{t \geq k} \binom{t+n-k}{n} z^t \right) \\ &= \sum_{t \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n h_k \binom{t+n-k}{n} \right) z^t. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir in der zweiten Zeile die Gleichung (2), in der vierten Zeile eine Indexverschiebung, und in der letzten Zeile eine Null-Addition verwendet. \square

Da wir in Satz 4.11 gesehen haben, dass $L_P(t)$ ein Polynom ist, können wir $t = 0$ einsetzen, um den konstanten Term zu ermitteln:

$$L_P(0) = h_0 \binom{n}{n} + \sum_{k=1}^n h_k \binom{n-k}{n} = \binom{n}{n} = 1.$$

KOROLLAR 4.17. Seien P und $\text{Ehr}_P(z)$ wie in Lemma 4.16. Dann ist

$$h_1 = L_P(1) - n - 1 = |P \cap \mathbb{Z}^n| - n - 1.$$

BEWEIS. Nach Gleichung (3) gilt

$$L_P(1) = \binom{n+1}{n} + h_1 \binom{n}{n} + \sum_{k=2}^n h_k \binom{n+1-k}{n} = n+1 + h_1.$$

□

KOROLLAR 4.18. Es sei P ganzzahlig mit Ehrhart-Polynom

$$L_P(t) = 1 + \sum_{i=1}^n c_i t^i.$$

Dann ist $n!c_i \in \mathbb{Z}$ für alle $i \in [n]$.

BEWEIS. In Gleichung (3) sind alle h_k ganzzahlig. Multipliziert man die Darstellung aus, bekommt man ein Polynom in t mit Koeffizienten, die als Bruch mit Nenner $n!$ geschrieben werden können. □

4.4. Diskretes Volumen. In diesem Abschnitt wollen wir den Zusammenhang des Ehrhart-Polynoms und der Ehrhart-Reihe eines Polytops mit dem Volumen dieses Polytops untersuchen. Insbesondere werden wir sehen, wieviel der Aussage aus Satz 3.1 (dem Satz von Pick) wir auf allgemeine Dimensionen übertragen können.

Im Folgenden sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ Riemann-integrierbar, was sicherlich für Polytope der Fall ist. Dann ist das *Volumen* von S definiert als

$$\text{vol}(S) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{vol} \left(\text{Approximation von } S \text{ mit Würfeln der Seitenlänge } \frac{1}{t} \right)$$

Solche Würfel können als der Zwischenraum zwischen Gitterpunkten in $(\frac{1}{t}\mathbb{Z})^n$ gesehen werden und haben Volumen $(\frac{1}{t})^n$. Angenommen, das Volumen ist nicht 0, also $\dim(S) = n$, dann kann man schreiben:

$$\begin{aligned} \text{vol}(S) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \right)^n \cdot \left| S \cap \left(\frac{1}{t}\mathbb{Z} \right)^n \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \right)^n \cdot |tS \cap \mathbb{Z}^n|. \end{aligned}$$

Damit lässt sich ein weiterer Koeffizient des Ehrhart-Polynoms bestimmen:

LEMMA 4.19. Es sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein ganzzahliges Polytop der Dimension n mit Ehrhart-Polynom

$$L_P(t) = 1 + \sum_{k=1}^n c_k t^k.$$

Dann ist das Volumen von P gleich dem Leitkoeffizienten von L_P , d.h.

$$c_n = \text{vol}(P).$$

BEWEIS. Man erhält unmittelbar:

$$\text{vol}(P) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \right)^n \cdot L_P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 + \sum_{k=1}^n c_k t^k}{t^n} = c_n.$$

□

KOROLLAR 4.20. *Es sei P ein ganzzahliges Polytop mit Dimension n und sei seine Ehrhart-Reihe gegeben durch*

$$\text{Ehr}_P(z) = \frac{\sum_{k=0}^n h_k z^k}{(1-z)^{n+1}}.$$

Dann hat P das Volumen

$$\text{vol}(P) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n h_k.$$

BEWEIS. Nach Lemma 4.16 ist der führende Koeffizient von $L_P(t)$ genau gegeben durch $\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n h_k$. \square

Wir definieren den *Grad* $\text{deg}(P)$ eines Polytops P als Grad des Polynoms

$$(1-z)^{n+1} \text{Ehr}_P(z) = \sum_{k=0}^n h_k z^k,$$

also in dieser Notation

$$\text{deg}(P) = \max\{k \in \mathbb{Z} : h_k \neq 0\}.$$

VERMUTUNG (Batyrev, 2007 [1]). *Gegeben ein Polytop P mit $\text{deg}(P) = k$ und $\dim(P) = n$. Dann ist das normalisierte relative Volumen $n! \text{vol}(P)$ beschränkt durch eine Konstante, die nur von h_k und nicht von n abhängt. Anders gesagt: Das normalisierte Volumen lässt sich global für alle Polytope mit Grad k und festem h_k beschränken.*

Bisher ist eine solche Schranke nur bekannt für $k = n$.

An dieser Stelle seien noch zwei weitere offene Fragen genannt:

- Wie kann man Ehrhart-Polynome von Grad n klassifizieren? (Bekannt für $n = 2$, teilweise bekannt für $n = 3$, $n = 4$.)
- Es seien zwei Polytope P und Q mit denselben Ehrhart-Polynomen gegeben. Unter welchen Umständen sind P und Q nicht unimodular äquivalent, d.h. wann existiert kein $m \in \mathbb{Z}^n$ und $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ mit $\det A = \pm 1$, so dass $Q = m + A(P)$?

5. Reziprozität

Reziprozitäten sind wechselseitige Abhängigkeiten. Unser Ziel wird es in diesem Abschnitt sein, solche Abhängigkeiten zu identifizieren und mit Hilfe der bisher entwickelten Methoden zu beweisen.

Wir beginnen mit der Ehrhart-Macdonald Reziprozität, die eine Abhängigkeit des Ehrhart-Polynoms von P an der Stelle $-t$ zu dem Ehrhart-Polynom von P° an der Stelle t herstellt, so wie wir es bereits in Abschnitt 2 beobachtet hatten.

SATZ 5.1 (Ehrhart-Macdonald-Reziprozität, 1971 [4]). *Es sei P ein ganzzahliges Polytop. Dann gilt*

$$L_P(-t) = (-1)^{\dim P} L_{P^\circ}(t).$$

Ähnlich wie schon für den Satz von Ehrhart (Satz 4.11) werden wir für den Beweis zunächst etwas über Kegel beweisen. Wir schreiben von nun an für $z \in \mathbb{R}^n$

$$\left(\frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_n} \right) = \frac{1}{z},$$

und hoffen, dass es jederzeit deutlich ist, wann es sich um einen Vektor handelt.

LEMMA 5.2 (Stanley Reziprozität, 1974 [7]). *Es sei K ein rationaler Kegel der Dimension n , Spitze 0 und $K^\circ \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset$. Dann gilt für $z \in \mathbb{R}^n$:*

$$\sigma_K \left(\frac{1}{z} \right) = (-1)^n \sigma_{K^\circ}(z)$$

BEWEIS. Es sei $\{K_1, \dots, K_m\}$ eine Triangulierung von K ohne neue Generatoren und sei $v \in \mathbb{R}^n$ so gewählt, dass

$$K^\circ \cap \mathbb{Z}^n = (v + K) \cap \mathbb{Z}^n$$

und

$$\partial(v + K_i) \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset \quad \text{und} \quad \partial(-v + K_i) \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset.$$

Dann ist insbesondere

$$K \cap \mathbb{Z}^n = (-v + K) \cap \mathbb{Z}^n,$$

denn jede facettendefinierende Hyperebene H von K wurde um weniger als eine Gitterebene verschoben (vgl. Übungsaufgabe 5.3), also folgt $H^+ \cap \mathbb{Z}^n = (-v + H^+) \cap \mathbb{Z}^n$.

Mit Übungsaufgabe 5.2 gilt dann

$$\begin{aligned} \sigma_K \left(\frac{1}{z} \right) &= \sigma_{-v+K} \left(\frac{1}{z} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \sigma_{-v+K_i} \left(\frac{1}{z} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m (-1)^n \sigma_{v+K_i}(z) \\ &= (-1)^n \sigma_{v+K}(z) \\ &= (-1)^n \sigma_{K^\circ}(z) \end{aligned}$$

□

Für das Innere eines Polytops definieren wir die Ehrhart-Reihe

$$\text{Ehr}_{P^\circ}(z) := \sum_{t \geq 1} L_{P^\circ}(t) z^t.$$

Hierbei starten wir bei $t \geq 1$, damit wiederum die Gleichung

$$\text{Ehr}_{P^\circ}(z) = \sigma_{(\text{cone}(P))^\circ}(1, \dots, 1, z)$$

erfüllt ist. Dies liegt daran, dass, wie wir beobachtet haben, der Summand in $\text{Ehr}_P(z)$ zu $t = 0$ der Spitze 0 entspricht, die nicht im Inneren liegt.

LEMMA 5.3. *Es sei P ein ganzzahliges Polytop der Dimension n . Dann gilt*

$$\text{Ehr}_P \left(\frac{1}{z} \right) = (-1)^{n+1} \text{Ehr}_{P^\circ}(z)$$

BEWEIS. Unter Verwendung der Stanley-Reziprozität (Lemma 5.2) in der zweiten Zeile und Lemma 4.13 in der dritten Zeile erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{Ehr}_{P^\circ}(z) &= \sigma_{(\text{cone } P)^\circ}(1, \dots, 1, z) \\ &= (-1)^{n+1} \sigma_{\text{cone } P}(1, \dots, 1, \frac{1}{z}) \\ &= (-1)^{n+1} \sum_{t \geq 0} L_P(t) \left(\frac{1}{z} \right)^t \\ &= (-1)^{n+1} \text{Ehr}_P \left(\frac{1}{z} \right). \end{aligned}$$

□

Mit diesen Hilfsmitteln lässt sich nun Satz 5.1 beweisen:

BEWEIS VON SATZ 5.1. Nach Übungsaufgabe 4.2 gilt

$$\sum_{t \geq 0} z^t = - \sum_{t \geq 1} \left(\frac{1}{z}\right)^t.$$

Dementsprechend sind auch die Ableitungen der formalen Reihen identisch, d.h.

$$(4) \quad \frac{d}{dz} \left(\sum_{t \geq 0} z^t \right) = \frac{d}{dz} \left(- \sum_{t \geq 1} z^{-t} \right),$$

was wir uns nun zunutze machen möchten. Einerseits gilt

$$\frac{d}{dz} \left(\sum_{t \geq 0} z^t \right) = \sum_{t \geq 0} (t+1)z^t = \sum_{t \geq 0} z^t + \sum_{t \geq 0} tz^t,$$

und andererseits hat man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(- \sum_{t \geq 1} z^{-t} \right) &= - \sum_{t \geq 1} (-t) \left(\frac{1}{z}\right)^{t+1} \\ &= - \sum_{t \geq 2} (-(t-1)) \left(\frac{1}{z}\right)^t \\ &= \sum_{t \geq 2} (t-1) \left(\frac{1}{z}\right)^t \\ &= - \sum_{t \geq 1} \left(\frac{1}{z}\right)^t + \frac{1}{2} + \sum_{t \geq 1} t \left(\frac{1}{z}\right)^t - \frac{1}{z} \\ &= - \sum_{t \geq 1} \left(\frac{1}{z}\right)^t - \sum_{t \geq 1} (-t) \left(\frac{1}{z}\right)^t. \end{aligned}$$

Setzt man diese beiden Seiten wieder in Gleichung (4) ein, dann folgt

$$\sum_{t \geq 0} tz^t = - \sum_{t \geq 1} (-t) \left(\frac{1}{z}\right)^t.$$

Induktiv erhalten wir damit für jedes Polynom $Q(t)$

$$\sum_{t \geq 0} Q(t)z^t = - \sum_{t \geq 1} Q(-t) \left(\frac{1}{z}\right)^t,$$

und dies gilt also insbesondere für das Ehrhart-Polynom, also:

$$\text{Ehr}_P \left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{t \geq 0} L_P(t) \left(\frac{1}{z}\right)^t = - \sum_{t \geq 1} L_P(-t)z^t.$$

Mit der Definition der Ehrhart-Reihe für das Innere von P und Lemma 5.3 folgt dann für $\dim(P) = n$:

$$\sum_{t \geq 1} L_{P^\circ}(t)z^t = \text{Ehr}_{P^\circ}(z) = (-1)^{n+1} \text{Ehr}_P \left(\frac{1}{z}\right) = (-1)^n \sum_{t \geq 1} L_P(-t)z^t.$$

Durch einen Koeffizientenvergleich ist damit die Behauptung gezeigt. □

Mithilfe der Ehrhart-Macdonald-Reziprozität können wir nun zum Beispiel den kleinsten ganzzahligen Dilatationsfaktor t bestimmen, mit welchem tP Gitterpunkte im Inneren enthält.

SATZ 5.4. *Es sei P ganzzahlig mit $\dim(P) = n$ und seine Ehrhart-Reihe sei gegeben als*

$$\text{Ehr}_P(z) = \frac{1 + \sum_{i=1}^n h_i z^i}{(1-z)^{n+1}}.$$

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $h_n = h_{n-1} = \dots = h_{k+1} = 0$ und $h_k \neq 0$.
- (ii) $(n - k + 1) \cdot P$ ist das kleinste ganzzahlige Dilat von P mit inneren Gitterpunkten.

BEWEIS. Wir verwenden wieder Gleichung (3) aus Lemma 4.16, also:

$$L_P(t) = \sum_{k=0}^n h_k \binom{t+n-k}{n}.$$

Es gelte nun $h_n = \dots = h_{k+1} = 0$ und $h_k \neq 0$. Dann gilt nach Satz 5.1 für $t \in [n-k]$:

$$L_{P^\circ}(t) = (-1)^n L_P(-t) = (-1)^n \left(\sum_{j=0}^k h_j \binom{-t+n-j}{n} \right) = 0$$

und

$$L_{P^\circ}(n-k+1) = (-1)^n L_P(-(n-k+1)) = (-1)^n h_k \binom{-1}{n} \neq 0.$$

Umgekehrt sei $L_{P^\circ}(t) = 0$ für $t \in [n-k]$. Dann gilt wieder mit 5.1 insbesondere:

$$0 = L_{P^\circ}(1) = (-1)^n L_P(-1) = (-1)^n \sum_{j=0}^n h_j \binom{-1+n-j}{n} = (-1)^n h_n \binom{-1}{n}$$

Somit ist $h_n = 0$. Iterativ erhält man so für $t = 2, 3, \dots, n-k$, dass $h_{n-1} = \dots = h_{k+1} = 0$ gilt, und genauso

$$0 \neq L_{P^\circ}(n-k+1) = (-1)^n h_k \binom{-1}{n},$$

das heißt, $h_k \neq 0$. □

Als letzte Anwendung werden wir nun noch mittels der Stanley-Reziprozität das Ergebnis aus Übungsaufgabe 4.2 verallgemeinern:

SATZ 5.5. *Es sei E ein System endlich vieler, linearer, homogener Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten in den Variablen x_1, \dots, x_n . Definiere*

$$F(x) = \sum_{\alpha \text{ löst } E, \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} x^\alpha \quad \text{und}$$

$$\bar{F}(x) = \sum_{\alpha \text{ löst } E, \alpha \in \mathbb{Z}_{> 0}^n} x^\alpha.$$

Dann sind F und \bar{F} zu rationalen Funktionen erweiterbar und die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) *Es gilt*

$$\bar{F}(x) = (-1)^m F\left(\frac{1}{x}\right).$$

- (ii) *E hat eine Lösung $\alpha \in \mathbb{Z}_{> 0}^n$ und es ist $m = n - \text{rang}(E) \pmod{2}$.*

BEWEIS. Dass die Existenz einer positiven Lösung notwendig ist, ist klar, denn der Ursprung ist immer eine Lösung von E , und \bar{F} wäre sonst als leere Summe definiert. Die Bedingung an m wird gleich klar werden.

Wir zeigen nun also noch, dass (ii) hinreichend für (i) ist. Die Menge der nicht-negativen Lösungen von E entspricht dem Schnitt des rationalen Kegels $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ mit einem $(n - \text{rang}(E))$ -dimensionalen linearen Unterraum. Es sei K dieser $m := (n - \text{rang}(E))$ -dimensionale Kegel. Dann ist

$$F(x) = \sum_{p \in K \cap \mathbb{Z}^n} x^P \quad \text{und} \quad \bar{F}(x) = \sum_{p \in K^\circ \cap \mathbb{Z}^n} x^P,$$

also mit Lemma 5.2

$$\bar{F}(x) = \sigma_{K^\circ}(x) = (-1)^m \sigma_K \left(\frac{1}{x} \right) = (-1)^m F \left(\frac{1}{x} \right).$$

□

Es sei noch erwähnt, dass sich dieses Ergebnis mit unseren Methoden leicht auf inhomogene Gleichungssysteme und Ungleichungssysteme erweitern lässt.

Literatur zu Kapitel 2

- [1] V.V. Batyrev, *Lattice polytopes with a given h^* -polynomial*, AMS, Contemp. Math **423** (2007), 1–10.
- [2] M. Beck, S. Robins, *Computing the continuous discretely*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2007.
- [3] E. Ehrhart, *Sur les polyèdres rationnels homothétiques à n dimensions*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A **254** (1962), 616–618.
- [4] I.G. Macdonald, *Polynomials associated with finite cell-complexes*, Journal of the London Mathematical Society **2** (1971), 181–192.
- [5] G.A. Pick, *Geometrisches zur Zahlenlehre*, Sitzungsberichte des deutschen naturwissenschaftlich-medizinischen Vereines für Böhmen „Lotos“ in Prag **19** (1899), 311–319.
- [6] T. Popoviciu, *Asupra unei probleme de partiție a numerelor*, Acad. Republicii Populare Romane, Filiala Cluj, Studii și cercetări științifice **4** (1953), 7–58.
- [7] R.P. Stanley, *Combinatorial reciprocity theorems*, Advances in Math. **14** (1974), 194–253.
- [8] R.P. Stanley, *Decompositions of rational convex polytopes*, Ann. Discrete Math. **6** (1980), 333–342.

Topologische Methoden

In diesem Kapitel möchten wir die Anwendung topologischer Methoden auf Probleme der diskreten Mathematik beleuchten. Zentral wird hierbei der topologische Satz von Borsuk-Ulam sein, der Antworten zu verschiedenen Fragestellungen aus der diskreten Mathematik gibt. Zu Beginn betrachten wir hierbei als Motivation die Kneser-Vermutung von 1955, die erst 23 Jahre später mit topologischen Methoden nachgewiesen werden konnte.

Rekapituliere den Knesergraphen $K(n, k)$ aus Kapitel 1, Definition 1.4, der über die Knotenmenge V und die Kantenmenge E wie folgt definiert ist:

$$V = \{A \in 2^{[n]} : |A| = k\},$$

$$E = \{\{A, B\} : A, B \in V, A \cap B = \emptyset\}.$$

In Kapitel 1 haben wir eine Aussage über die Unabhängigkeitszahl von $K(n, k)$ getroffen, nun möchten wir uns dessen chromatischer Zahl zuwenden, also der minimalen Anzahl von Farben in einer gültigen Färbung. Hierzu hat Kneser 1955 eine Aufgabe gestellt, die zu der folgenden Vermutung umformuliert werden kann:

VERMUTUNG (Kneser, 1955 [6]). *Für die chromatische Zahl des Knesergraphen gilt*

$$\chi(K(n, k)) = n - 2k + 2.$$

In Übungsaufgabe 7.1 a) werden wir eine Färbung von $K(n, k)$ mit $n - 2k + 2$ Farben finden. In Kapitel 1 haben wir mithilfe des Satzes von Erdős-Ko-Rado, 1.2, gesehen, dass für die Unabhängigkeitszahl gilt: $\alpha(K(n, k)) = \binom{n-1}{k-1}$. Somit lässt sich die chromatische Zahl abschätzen:

$$\chi(K(n, k)) \geq \frac{|V|}{\alpha(K(n, k))} = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k-1}} = \frac{n}{k}.$$

Dies ist leider nur eine schwache untere Schranke. Dass Knesers Vermutung Tatsache ist, konnte erst 1978 von Lovász bewiesen werden [8]. Er überraschte hierbei mit der Anwendung von topologischen Methoden auf das graphentheoretische Problem, er verwendete nämlich den Satz von Borsuk-Ulam. Bis heute gibt es keinen Beweis von Knesers Vermutung, der nicht auf diese topologischen Hintergründe zurückgreift (auch wenn sie nicht immer explizit benannt werden).

Diese Kapitel folgt den beiden Büchern [7] und [9].

1. Der Satz von Borsuk-Ulam

Hat man auf dem Rand der n -dimensionalen Einheitskugel, der Einheitskugel

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\},$$

eine \mathbb{R}^n -wertige, stetige Funktion definiert, so besagt der Satz von Borsuk-Ulam, dass es einen Punkt gibt, dessen gegenüberliegender Punkt (Punktspiegelung am Ursprung) den gleichen Funktionswert hat. In einer idealisierten Welt, in der die Erde eine Kugel ist, kann man beispielweise die stetigen Funktionen „Luftdruck“

und „Temperatur“ zusammenfassen zu einer \mathbb{R}^2 -wertigen stetigen Funktion und erhält das Ergebnis, dass es zwei „gegenüberliegende“ Punkte auf der Erde geben muss, die den gleichen Luftdruck und die gleiche Temperatur haben.

In diesem Abschnitt möchten wir den Satz von Borsuk-Ulam formulieren. Der Satz besitzt viele äquivalente Formulierungen. Wir werden vier davon nennen und beweisen, dass sie zueinander äquivalent sind. Die vierte Formulierung werden wir im nächsten Abschnitt auf die Kneser-Vermutung anwenden. Der Beweis des Satzes von Borsuk-Ulam folgt dann in den folgenden Abschnitten.

SATZ 1.1 (Borsuk-Ulam, 1933 [2]). *Die folgenden Aussagen gelten und sind äquivalent:*

- (1) *Es sei $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann existiert ein Punkt $x \in S^n$, so dass $f(x) = f(-x)$.*
- (2) *Es sei $f: S^n \rightarrow S^m$ stetig und antipodal, das heißt $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in S^n$, dann gilt $n \leq m$.*
- (3) *Es sei $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und antipodal. Dann existiert ein $x \in S^n$, so dass $f(x) = 0$.*
- (4) *Gegeben sei eine Überdeckung $S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} M_i$, wobei jedes M_i offen oder abgeschlossen in S^n ist. Dann existiert ein j , so dass $M_j \cap (-M_j) \neq \emptyset$.*

BEWEIS DER ÄQUIVALENZEN. Wir zeigen den Ringschluss

$$(2) \xrightarrow{I} (3) \xrightarrow{II} (1) \xrightarrow{III} (4) \xrightarrow{IV} (2).$$

Zu I: Es sei $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und antipodal. Angenommen, es gelte $f(x) \neq 0$ für alle $x \in S^n$. Dann ist die Abbildung

$$g: S^n \rightarrow S^{n-1} \\ x \mapsto \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$$

stetig und antipodal, was (2) widerspricht.

Zu II: Es sei $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann ist die Abbildung

$$g: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto f(x) - f(-x)$$

stetig und antipodal, somit existiert $x \in S^n$ mit $g(x) = 0$, also auch mit $f(x) = f(-x)$.

Zu III: Gegeben sei eine Überdeckung

$$S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} M_i,$$

wobei für jedes $i \in [n+1]$ die Menge $M_i \subseteq S^n$ offen oder abgeschlossen ist. Definiere

$$f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto (\text{dist}(x, M_i))_{i \in [n]}.$$

Da f stetig ist, existiert ein $x \in S^n$, so dass $f(x) = f(-x)$. Da die M_i , $i \in [n+1]$ eine Überdeckung von S^n bilden, gibt es ein $j \in [n+1]$, so dass $x \in M_j$. Gilt $j < n+1$, so hat man

$$0 = \text{dist}(x, M_j) = \text{dist}(-x, M_j).$$

Ist dieses M_j abgeschlossen, so liegt folglich auch $-x$ in M_j . Ist M_j offen, so existiert $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq M_j$. Wegen

$$0 = \text{dist}(-x, M_j) = \text{dist}(x, -M_j)$$

gilt dann aber $B_\varepsilon(x) \cap (-M_j) \neq \emptyset$. Entsprechend hat man für $j < n + 1$ die Behauptung. Ist $j = n + 1$, so ist entweder $-x \in M_{n+1}$ und wir sind fertig, oder aber es existiert $k < n + 1$ mit $-x \in M_k$. Dann hat man

$$0 = \text{dist}(-x, M_k) = \text{dist}(x, M_k)$$

und kann fortfahren wie eben für $j < n + 1$ beschrieben.

Zu IV: Angenommen, es sei $f: S^n \rightarrow S^m$ stetig und antipodal mit $m < n$. Ohne Einschränkung setzen wir $m = n - 1$, ansonsten ist die Abbildung $S^m \rightarrow S^{n-1}$, $x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ stetig und antipodal. Wir werden nun eine Zwischenbehauptung nutzen, deren Beweis wir im Anschluss skizzieren:

(ZB) Es existieren abgeschlossene Teilmengen $A_1, \dots, A_{n+1} \subseteq S^{n-1}$, so dass $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = S^{n-1}$ und für jedes $i \in [n + 1]$ gilt $A_i \cap (-A_i) = \emptyset$.

Da f stetig ist und alle A_i abgeschlossen sind, erhalten wir durch (ZB) wiederum abgeschlossene Mengen

$$M_i := f^{-1}(A_i) = \{x \in S^n : f(x) \in A_i\}, \quad i \in [n + 1],$$

die S^n überdecken. Weil f antipodal ist, gilt:

$$\begin{aligned} -M_i &= \{-x : f(x) \in A_i\} \\ &= \{-x : -f(-x) \in A_i\} \\ &= \{y : f(y) \in -A_i\} \\ &= f^{-1}(-A_i). \end{aligned}$$

Da sich A_i und $-A_i$ nicht schneiden, schneiden sich auch nicht deren Urbilder. Folglich ist der Schnitt von M_i und $-M_i$ für jedes $i \in [n + 1]$ leer, was (4) widerspricht. \square

Bevor wir den Beweis von (ZB) skizzieren, ein kleiner Notationshinweis: Einen n -Simplex notieren wir ab nun anders als im vorangegangenen Kapitel mit kleinem Sigma, σ . Das große Delta, Δ , reservieren wir hier für Simplicialkomplexe, die wir in Abschnitt 3 einführen. Außerdem wird von nun an $d \in \mathbb{N}$ für die Dimension eines geometrischen Objekts verwendet. In den letzten Kapiteln war es meist n .

BEWEISSKIZZE VON (ZB). Betrachte einen n -Simplex $\sigma \subset S^{n-1}$, so dass $0 \in \text{int } \sigma$. Definiere die stetige und surjektive Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: \partial\sigma &\rightarrow S^{n-1} \\ x &\mapsto \frac{x}{\|x\|}. \end{aligned}$$

Sind F_i , $i \in [n + 1]$, die Facetten von σ , so sind die F_i kompakt und überdecken $\partial\sigma$. Somit ist

$$A_i := \varphi(F_i)$$

abgeschlossen für jedes $i \in [n + 1]$, da φ stetig ist. Außerdem überdecken die A_i S^{n-1} , da φ surjektiv ist (Abbildung 1). Hätte man ein j mit

$$A_j \cap (-A_j) = \emptyset,$$

dann existiert also ein x mit $x, -x \in \varphi(F_j)$. Dann schneidet die Gerade durch $x, 0$ und $-x$ die Facette F_j zweimal und durchläuft das Innere von σ . Das widerspricht der Konvexität einer Facette. \square

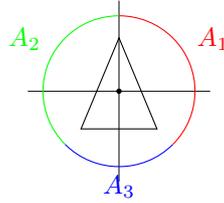


ABBILDUNG 1. Beispiel der Beweisidee von (ZB). Überdeckung der S^1 durch abgeschlossene Mengen.

Borsuks Vermutung für die Kugel. Zum Abschluss dieses Abschnitts möchten wir noch einen weiteren Bogen zu Kapitel 1 schlagen. Erinnern wir uns zurück an Borsuks Vermutung 5.2. Sie besagt, dass es für jedes $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Partition aus $n + 1$ Mengen gibt, so dass jede Menge der Partition einen echt kleineren Durchmesser hat als X . Wir haben gesehen, dass die Vermutung im Allgemeinen falsch ist. Ein ähnliches Argument wie das aus der Beweisskizze von (ZB) zeigt aber, dass sie für die n -Kugel B^n stimmt.

Wir wollen hier begründen, wieso sich die n -Kugel B^n nicht in n Mengen partitionieren lässt, die jeweils kleineren Durchmesser als B^n haben. Auch hierbei können wir mit der Alternativformulierung (4) des Satzes von Borsuk-Ulam argumentieren.

Angenommen, es gibt n Mengen $X_i \subseteq B^n$, $i \in [n]$, mit

$$B^n = \bigcup_{i=1}^n X_i,$$

so dass alle X_i kleineren Durchmesser als B^n haben. Um einen Widerspruch mittels Borsuk-Ulam zu erhalten, definieren wir uns abgeschlossene Mengen auf dem Rand von B^n , die den Rand, also S^{n-1} , komplett überdecken. Dafür sei für $i \in [n]$ definiert

$$A_i := \overline{X_i} \cap S^{n-1}.$$

Die Vereinigung der A_i ist die Sphäre S^{n-1} , das heißt, nach Borsuk-Ulam (4) existieren ein $x \in S^{n-1}$ und ein $j \in [n]$, so dass $x, -x \in A_j$. Dann gilt aber $x, -x \in \overline{X_j}$, und somit

$$\begin{aligned} \text{diam}(X_j) &= \text{diam}(\overline{X_j}) = \sup\{\|y - z\| : y, z \in X_j\} \\ &\geq \|x - (-x)\| = \|2x\| = 2 = \text{diam}(B^n), \end{aligned}$$

was der Wahl der X_i widerspricht.

2. Beweis der Kneser-Vermutung

Wir folgen hier der Beweisfassung, die Joshua Greene 2002 als Bachelorstudent fand, einer Vereinfachung eines Beweises von Imre Bárány [1].

SATZ 2.1. Die Kneser-Vermutung 3 ist wahr:

$$\chi(K(n, k)) = n - 2k + 2.$$

BEWEIS VON GREENE, 2002 [5]. Nachdem in Übungsaufgabe 7.1 a) eine Färbung mit $n - 2k + 2$ Farben gefunden wurde, brauchen wir nur noch zeigen, dass es keine Färbung des Knesergraphen mit $n - 2k + 1$ Farben geben kann.

Angenommen, es gibt eine Färbung $c: \binom{[n]}{k} \rightarrow [n - 2k + 1]$. Setze $d := n - 2k + 1$ und wähle $X \subseteq S^d$ als n -elementige Menge $X = \{x_i : i \in [n]\}$, so dass jede $(d + 1)$ -elementige Teilmenge von X linear unabhängig ist:

$$(5) \quad \{x_{i_j} : j \in [d + 1]\} \subseteq X \implies \{x_{i_j} : j \in [d + 1]\} \text{ linear unabhängig.}$$

Nun wollen wir für jedes $i \in [d]$ in der Menge U_i alle Punkte x der Sphäre S^d zusammenfassen, für die die offene Hemisphäre $H(x)$ mit Zentrum x eine k -elementige Teilmenge von X enthält, deren Menge der Indizes durch die Farbe i gefärbt ist (Abbildung 2). Definiere also für $i \in [d]$

$$U_i := \left\{ x \in S^d : \exists J \subseteq [n], |J| = k, c(J) = i, \text{ so dass } \{x_j : j \in J\} \subseteq H(x) \right\}.$$

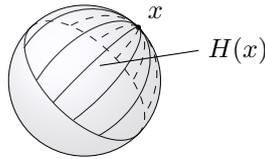


ABBILDUNG 2. Hemisphäre in der S^2 .

Da $H(x)$ offen ist, ist auch U_i offen. Denn wenn $\{x_i : i \in I\} \subseteq H(x)$ gilt, dann ist auch für $y \in B_\varepsilon(x)$ mit ε genügend klein $\{x_i : i \in I\} \subseteq H(y)$. Entsprechend ist auch die (endliche) Vereinigung aller U_i offen. Deshalb ist die Menge

$$A := S^d \setminus \bigcup_{i=1}^d U_i$$

abgeschlossen.

Nach Alternativformulierung (4) des Satzes von Borsuk-Ulam gibt es dann aber ein $x \in S^d$, so dass $x, -x \in A$ oder $x, -x \in U_i$ für ein $i \in [d]$.

Angenommen, die beiden Punkte liegen in einer der Mengen U_i , dann gibt es zwei k -elementige Indexmengen $I_1, I_2 \subseteq [n]$, die beide mit Farbe i gefärbt sind. Da aber $H(x)$ und $H(-x)$ disjunkt sind, sind auch $\{x_j : j \in I_1\}$ und $\{x_j : j \in I_2\}$ disjunkt. Entsprechend müssen die Mengen I_1 und I_2 im Knesergraphen durch eine Kante verbunden sein und c ist keine gültige Färbung.

Angenommen also, x und $-x$ seien in A . Dann liegt in den Hemisphären $H(x)$ und $H(-x)$ keine k -elementige Teilmenge von X , denn sonst wäre die zugehörige Indexmenge durch c gefärbt und x bzw. $-x$ in einer der Mengen U_i . Das heißt

$$|X \cap H(x)|, |X \cap H(-x)| < k$$

Die anderen mindestens $n - 2(k - 1)$, also $(d + 1)$ -vielen Elemente aus X müssen folglich auf der Hyperebene durch 0 liegen, die nicht von $H(x)$ und $H(-x)$ abgedeckt wird (Rand der offenen Hemisphäre). Also liegen $d + 1$ Elemente aus X in einem d -dimensionalen Unterraum des \mathbb{R}^{d+1} . Ein Widerspruch zu deren linearen Unabhängigkeit (5). \square

3. Modellierung von topologischen Räumen durch Simplicialkomplexe

Ziel der nächsten Abschnitte ist es, den Beweis des Satzes von Borsuk-Ulam über ein kombinatorisches Analogon zu vollziehen, nämlich über das Lemma von Tucker. Zunächst müssen für dessen Formulierung in diesem Abschnitt die Grundlagen geschaffen werden.

Ein *topologischer Raum* ist definiert als ein Tupel (X, \mathcal{O}) , wobei X eine Menge ist und $\mathcal{O} \subseteq 2^X$ die Menge der *offenen* Mengen ist. Dabei sollen folgende Eigenschaften erfüllt sein:

- Die leere Menge und X sind Elemente in \mathcal{O} .
- Der Schnitt endlich vieler Elemente aus \mathcal{O} ist wieder Element in \mathcal{O} .
- Eine beliebige Vereinigung von Elementen aus \mathcal{O} ist wieder Element in \mathcal{O} .

Ist dies gegeben, so nennt man \mathcal{O} eine *Topologie auf X* .

Für eine beliebige Menge X gibt es folgende einfache Beispiele für Topologien:

- Die *triviale* bzw. *indiskrete* Topologie $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$.
- Die *diskrete* Topologie $\mathcal{O} = 2^X$.

Für einen beliebigen metrischen Raum (X, d) lässt sich eine Topologie durch die Metrik induzieren über

$$\mathcal{O} := \left\{ U \subseteq X : \forall x \in U \exists \varepsilon > 0, \text{ so dass } B_\varepsilon^d(x) \subseteq U \right\}.$$

Ist (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ beliebig, so ist der *von Y induzierte topologische Unterraum* definiert als (Y, \mathcal{O}_Y) mit $\mathcal{O}_Y := \{U \cap Y : U \in \mathcal{O}\}$. Beispielsweise ist $[0, \frac{1}{2})$ offen im topologischen Teilraum $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

In unserem Fall betrachten wir nur Unterräume des \mathbb{R}^d mit der von der euklidischen Metrik induzierten *Standardtopologie*.

Es seien (X_1, \mathcal{O}_1) und (X_2, \mathcal{O}_2) zwei topologische Räume. Eine Abbildung $f: X_1 \rightarrow X_2$ heißt *stetig* genau dann, wenn für alle U aus \mathcal{O}_2 das Urbild $f^{-1}(U)$ in \mathcal{O}_1 liegt. Der Begriff der Stetigkeit ist enorm wichtig. Insbesondere ermöglicht er es, eine Aussage darüber zu treffen, wann man zwei topologische Räume miteinander identifizieren kann:

Eine Abbildung $f: X_1 \rightarrow X_2$ heißt *Homöomorphismus* genau dann, wenn f bijektiv ist und für alle U in X_1 gilt

$$f(U) \in \mathcal{O}_2 \iff U \in \mathcal{O}_1.$$

Mit dem Begriff der Stetigkeit kann man diese Bedingung für ein bijektives f auch folgendermaßen ausdrücken: f ist stetig und f^{-1} ist stetig. Als Notation verwendet man dann

$$X_1 \cong X_2.$$

Beispielsweise hat man $(0, 1) \cong \mathbb{R}$, woran man sieht, dass Beschränktheit keine topologische Eigenschaft ist. Der zugehörige Homöomorphismus betrachtet das Intervall $(0, 1)$ als offenen Halbkreis mit Umfang 1 (also Radius $\frac{1}{\pi}$) und projiziert diesen dann stetig auf \mathbb{R} (Abbildung 3). Das Verfahren ist natürlich für jedes offene Intervall möglich.



ABBILDUNG 3. Homöomorphismus zwischen $(0, 1)$ und \mathbb{R} .

Simplizialkomplexe. Simplizialkomplexe sind Räume, die aus Simplexes „zusammengelebt“ sind. Sie werden verwendet, um topologische Räume kombinatorisch zu modellieren. In diesem Kapitel bezeichnet

$$\sigma = \text{conv}(\{x_0, \dots, x_k\}) \subseteq \mathbb{R}^d$$

mit affin unabhängigen Vektoren $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$ einen k -dimensionalen Simplex im \mathbb{R}^d . In dem Fall sind alle x_i Ecken von σ und man bezeichnet die Eckenmenge als

$$V(\sigma) = \{x_0, \dots, x_k\}.$$

Als einen (geometrischen) Simplizialkomplex im \mathbb{R}^d bezeichnen wir eine Familie Δ von Simplexes im \mathbb{R}^d mit folgenden Eigenschaften:

1. Für jeden Simplex $\sigma \in \Delta$ sind auch alle seine Seiten Elemente in Δ .
2. Für je zwei Simplexes $\sigma, \tau \in \Delta$ ist der Schnitt $\sigma \cap \tau$ Seite von σ und Seite von τ .

Beachte zur ersten Bedingung, dass eine Seite eines Simplex wieder ein Simplex ist (vergleiche Übungsaufgabe 4.1). Die zweite Bedingung ist uns bereits von Triangulierungen aus Kapitel 2 bekannt. Beispiele für Simplizialkomplexe sind:

- Alle Elemente einer Triangulierung eines Polytops und deren Seiten.
- Randkomplex eines simplizialen Polytops, wobei P simplizial ist, wenn alle Seiten von P Simplexes sind. Man schreibt

$$\Delta(\partial P) := \{\sigma : \sigma \text{ ist Seite von } P, \sigma \neq P\}.$$

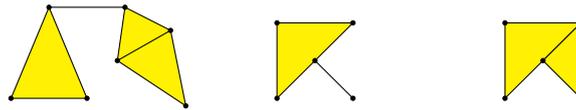


ABBILDUNG 4. Links ein Simplizialkomplex, mittig und rechts keine Simplizialkomplexe.

Die *Dimension* eines Simplizialkomplexes ist definiert als die maximale Dimension eines Simplex im Simplizialkomplex und die Eckenmenge des Simplizialkomplexes entspricht der Vereinigung aller Ecken seiner Simplexes:

$$\dim(\Delta) := \max_{\sigma \in \Delta} \dim(\sigma),$$

$$V(\Delta) := \bigcup_{\sigma \in \Delta} V(\sigma).$$

Nun lässt sich noch fragen, inwiefern ein Simplizialkomplex einen topologischen Raum modelliert: Für einen Simplizialkomplex Δ im \mathbb{R}^d definiert man

$$\|\Delta\| := \bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma \subseteq \mathbb{R}^d$$

als das *Polyeder von Δ* . Dies muss im Allgemeinen kein konvexes Polyeder sein (Abbildung 4). Wir werden stets endliche Simplizialkomplexe betrachten. In diesem Fall erhält $\|\Delta\|$ die Unterraumtopologie als Unterraum des \mathbb{R}^d . Ist X ein topologischer Raum mit

$$X \cong \|\Delta\|,$$

dann nennt man Δ *Triangulierung* von X .

Dass wir nur endliche Simplizialkomplexe betrachten, ist tatsächlich eine Einschränkung, da dann $\|\Delta\|$ immer kompakt ist. So können wir zum Beispiel keine Triangulierungen des ganzen Raum \mathbb{R}^d betrachten.

BEISPIEL. Betrachte das d -dimensionale Kreuzpolytop

$$Q^d = \text{conv}(\{\pm e_1, \dots, \pm e_d\})$$

und den *Randkomplex des Kreuzpolytops*

$$\diamond^{d-1} := \Delta(\partial Q^d)$$

$$= \{ \text{conv}(\{\epsilon_{i_1} e_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_k} e_{i_k}\}) : 0 \leq k \leq d, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d, \epsilon_{i_j} \in \{\pm 1\} \}.$$

Dies ist ein $(d-1)$ -dimensionaler Simplizialkomplex und es gilt

$$\|\diamond^{d-1}\| = \partial Q^d \cong S^{d-1}.$$

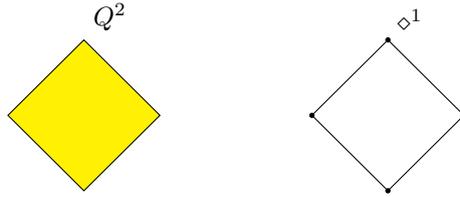


ABBILDUNG 5. Links das Kreuzpolytop, rechts dessen Randkomplex.

Nun möchten wir noch Abbildungen zwischen Simplizialkomplexen betrachten. Es seien Δ_1 und Δ_2 zwei Simplizialkomplexe. Man nennt eine Abbildung

$$f: V(\Delta_1) \rightarrow V(\Delta_2)$$

zwischen den Eckenmengen *simplizial*, falls die Ecken eines Simplex aus Δ_1 auf die Ecken eines Simplex in Δ_2 abgebildet werden:

$$\text{conv}(f(V(\sigma))) \in \Delta_2$$

für alle $\sigma \in \Delta_1$. Für eine solche simpliziale Abbildung f definiert man $\|f\|$ als die *affine Erweiterung von f* :

$$\|f\|: \|\Delta_1\| \rightarrow \|\Delta_2\|$$

$$x \mapsto \sum_{i=0}^k \alpha_i f(x_i),$$

wobei $\sigma = \text{conv}(\{x_0, \dots, x_k\})$ der eindeutige Simplex mit $x \in \text{int}(\sigma)$ ist und x eindeutig als Konvexkombination dargestellt ist durch

$$x = \sum_{i=0}^k \alpha_i x_i, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1.$$

Wir verwenden ohne Beweis die Aussage:

Ist f simplizial, so ist $\|f\|$ stetig.

4. Das Lemma von Tucker

Wir nennen einen Simplizialkomplex Δ_1 eine *Unterteilung* eines Simplizialkomplexes Δ_2 , falls

1. Die Polyeder identisch sind, $\|\Delta_1\| = \|\Delta_2\|$.
2. Jeder Simplex aus Δ_1 in einem Simplex aus Δ_2 enthalten ist, das heißt

$$\forall \sigma \in \Delta_1 \exists \tau \in \Delta_2 : \sigma \subseteq \tau.$$

Im folgenden werden wir Unterteilungen des oben eingeführten Randkomplexes des Kreuzpolytops betrachten. Wir nennen eine solche Unterteilung Δ von \diamond^d *antipodensymmetrisch*, falls für jedes $\sigma \in \Delta$ auch $-\sigma \in \Delta$ gilt.

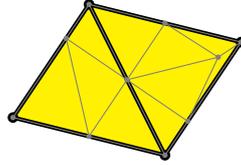


ABBILDUNG 6. Der graue Simplicialkomplex ist eine Unterteilung des schwarzen Simplicialkomplexes.

LEMMA 4.1 (Tucker, 1946 [11]). *Es sei Δ eine antipodensymmetrische Unterteilung von \diamond^d und*

$$\lambda: V(\Delta) \rightarrow V(\diamond^{d-1})$$

eine antipodale Abbildung. Dann existiert eine Kante $e = \text{conv}(\{x, y\})$ in Δ , so dass

$$\lambda(x) = -\lambda(y).$$

Die folgende Abbildung 7 illustriert das Lemma von Tucker für die Fälle $d = 1$ und $d = 2$. Um die Zuordnung λ einfacher darzustellen, identifizieren wir $V(\diamond^{d-1}) = \{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$ mit der Menge $\{\pm 1, \dots, \pm d\}$. Wir betrachten also ein „Labeling“ von $V(\Delta)$ mit den Zahlen $\{\pm 1, \dots, \pm d\}$. Für $d = 1$ lässt sich Tuckers Lemma unter Ausnutzung der Antipodalität von λ leicht elementar zeigen. Für $d = 2$ genügt es wegen der Antipodalität, die Vorderseite einer Unterteilung darzustellen.

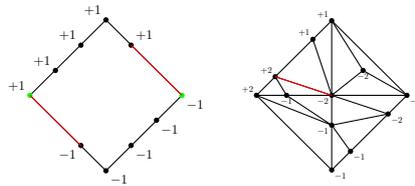


ABBILDUNG 7. Antipodensymmetrisches Labeling einer Unterteilung von \diamond^1 (links) und der Vorderseite von \diamond^2 (rechts), je mit rot markierter gewünschter Kante.

Wie angekündigt werden wir nun den Satz von Borsuk-Ulam mit Hilfe des Lemmas von Tucker beweisen. Das Lemma von Tucker zeigen wir anschließend unter Verwendung eines Satzes von Ky Fan, welchen wir dann zum Abschluss beweisen.

Nachweis des Satzes von Borsuk-Ulam. Dass aus dem Satz von Borsuk-Ulam Tuckers Lemma folgt, wird in Übungsaufgabe 7.4 bewiesen. Wir zeigen, dass aus dem Lemma von Tucker der Satz von Borsuk-Ulam folgt. Für diesen Beweis benötigen wir baryzentrische Unterteilungen.

Es sei ein Simplex $\sigma = \text{conv}(\{x_0, \dots, x_k\})$ gegeben. Man definiert den *Schwerpunkt* (bzw. das *Baryzentrum*) von σ durch:

$$b(\sigma) := \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k x_i.$$

Eine *baryzentrische Unterteilung* eines Simplicialkomplexes Δ ist die Menge

$$\text{sd } \Delta = \{\text{conv}(\{b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_k)\}) : \sigma_0 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_k, \sigma_i \in \Delta \setminus \{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Wir halten, ohne sie zu beweisen, wichtige Eigenschaften von baryzentrischen Unterteilungen fest.

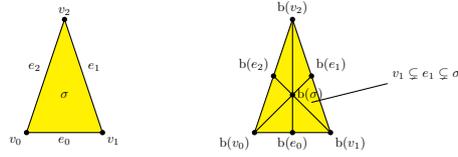


ABBILDUNG 8. Links ein Simplizialkomplex, rechts dessen baryzentrische Unterteilung.

- Es sei $\sigma_0 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_k$ eine aufsteigende Kette von Simplizes aus $\Delta \setminus \emptyset$, so dass $\dim(\sigma_i) = i$ für alle $i \in 0, \dots, k$. Es gilt

$$\text{diam} \left(\text{conv} \left(\{b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_k)\} \right) \right) \leq \frac{k}{k+1} \text{diam}(\sigma_k).$$

- Für einen d -dimensionalen Simplizialkomplex Δ folgt:

$$\max_{\tau \in \text{sd } \Delta} \text{diam}(\tau) \leq \frac{d}{d+1} \max_{\sigma \in \Delta} \text{diam}(\sigma).$$

- Also lässt sich ein endlicher geometrischer Simplizialkomplex Δ durch wiederholte baryzentrische Unterteilungen so weit verfeinern, dass alle Simplizes beliebig klein werden:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} : \max_{\tau \in \text{sd}^m \Delta} \text{diam}(\tau) < \varepsilon,$$

wobei

$$\text{sd}^m(\Delta) = \underbrace{\text{sd}(\text{sd}(\dots(\text{sd}(\Delta))\dots))}_{m\text{-mal}}$$

die m -fache Hintereinanderausführung der baryzentrischen Unterteilung ist. (Siehe Übungsaufgabe 8.1.)

- Das zu Δ gehörige Polyeder verändert sich durch baryzentrische Unterteilungen nicht:

$$\forall m \in \mathbb{N} : \|\text{sd}^m(\Delta)\| = \|\Delta\|.$$

BEWEIS DES SATZES VON BORSUK-ULAM, SATZ 1.1. Da wie bereits erwähnt $\|\diamond^d\| \cong S^d$ gilt, können wir eine stetige und antipodale Funktion

$$f: \|\diamond^d\| \rightarrow \mathbb{R}^d$$

betrachten und die Existenz eines x mit $f(x) = 0$ beweisen.

Wir nutzen nun die Aussage, dass wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein x_ε finden, so dass

$$\|f(x_\varepsilon)\|_\infty < \varepsilon,$$

welche wir anschließend beweisen. Mit dieser Aussage definieren wir uns eine Folge, indem wir jedem $n \in \mathbb{N}$ das Folgenglied $x_n := x_{\frac{1}{n}}$ mit $\varepsilon = \frac{1}{n}$ zuordnen. Wir erhalten jeweils, dass $\|f(x_n)\|_\infty < \frac{1}{n}$ ist. Aufgrund der Kompaktheit von $\|\diamond^d\|$ hat die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt $x \in \|\diamond^d\|$. Das heißt, es gibt eine Teilfolge, die gegen x konvergiert, beziehungsweise es existieren Indizes n_k , $k \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x$. Dann gilt $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ und damit wegen der Stetigkeit von f auch $f(x) = 0$, was zu zeigen war.

Es bleibt zu zeigen, dass ein solches x_ε für jedes $\varepsilon > 0$ existiert. Hierbei werden wir das Lemma von Tucker, Lemma 4.1, einsetzen.

Zunächst verwenden wir baryzentrische Unterteilungen. Wir wählen $k \in \mathbb{N}$ so, dass für jede Kanten e von $\text{sd}^k(\diamond^d)$ mit Ecken x, y gilt:

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty < \varepsilon.$$

Das können wir tun, da f und damit auch jede Komponente f_i von f stetig ist. Wir finden daher ein $\delta > 0$, so dass für Vektoren x und y mit geringererem Abstand als δ der Abstand der Funktionswerte, $|f_i(x) - f_i(y)|$, kleiner als ε ist für alle $i \in [d]$. Nach obigen Überlegungen dürfen wir aber k so wählen, dass

$$\max_{\sigma \in \text{sd}^k(\diamond^d)} \text{diam}(\sigma) < \varepsilon.$$

Das Ergebnis $\Delta = \text{sd}^k(\diamond^d)$ ist eine antipodensymmetrische Unterteilung von \diamond^d . Definiere nun einerseits

$$\begin{aligned} i: V(\Delta) &\rightarrow [d] \\ x &\mapsto \min \{i : |f_i(x)| = \|f(x)\|_\infty\} \end{aligned}$$

und darauf aufbauend

$$\begin{aligned} \lambda: V(\Delta) &\rightarrow V(\diamond^{d-1}) \\ x &\mapsto \begin{cases} +e_{i(x)}, & \text{falls } f_{i(x)}(x) \geq 0 \\ -e_{i(x)}, & \text{falls } f_{i(x)}(x) < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Da f antipodal ist, gilt

$$|f_i(-x)| = |-f_i(x)| = |f_i(x)|,$$

also auch

$$i(-x) = i(x).$$

Hieraus erhält man wiederum, dass auch λ antipodal ist, also

$$\lambda(-x) = -\lambda(x),$$

denn es gilt

$$f_{i(-x)}(-x) = f_{i(x)}(-x) = -f_{i(x)}(x).$$

Alle Voraussetzungen für das Lemma von Tucker sind erfüllt. Es existiert somit eine Kante $e = \text{conv}(\{x, y\})$ in Δ mit $\lambda(x) = -\lambda(y)$. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $\lambda(x) = e_i$ (und $\lambda(y) = -e_i$). Damit gilt $f_i(x) \geq 0$, $|f_j(x)| \leq f_i(x)$ für alle $j \in [d]$ und $f_i(y) < 0$. Wir haben somit nach Wahl von Δ :

$$f_i(x) - f_i(y) = |f_i(x) - f_i(y)| \leq \|f(x) - f(y)\|_\infty < \varepsilon.$$

Es gilt also

$$\varepsilon > \varepsilon + f_i(y) > f_i(x) \geq |f_j(x)| \quad \text{für alle } j \in [n],$$

und wir dürfen $x_\varepsilon := x$ setzen. \square

Nachweis des Lemmas von Tucker. Wir möchten nun noch das Lemma von Tucker beweisen. Anstatt einen direkten Beweis durchzuführen, ist es einfacher eine stärkere Aussage zu zeigen, nämlich folgenden Satz des chinesisch-amerikanischen Mathematikers Ky Fan.

SATZ 4.2 (Fan, 1952 [4]). *Es sei Δ eine antipodensymmetrische Unterteilung von \diamond^d . Zudem sei*

$$\lambda: V(\Delta) \rightarrow V(\diamond^m)$$

eine antipodale Funktion, so dass es keine Kante in Δ mit Ecken x, y gibt mit $\lambda(x) = -\lambda(y)$. Dann ist die Anzahl aller d -dimensionalen, \oplus -alternierenden Simplexes in Δ ungerade:

$$\left| \{ \sigma \in \Delta : \dim(\sigma) = d, \sigma \text{ } \oplus\text{-alternierend} \} \right| \in 2\mathbb{Z} + 1.$$

Hierbei nennt man einen Simplex $\sigma \in \Delta$ alternierend, wenn

$$\lambda(V(\sigma)) = \{ \epsilon_0 e_{j_0}, \dots, \epsilon_k e_{j_k} \}$$

für aufsteigende Indizes $j_0 < \dots < j_k$ und Vorzeichen $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ und die Vorzeichen alternieren, also $\epsilon_i \neq \epsilon_{i+1}$ für jedes $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. Ein $\sigma \in \Delta$ heißt \oplus -alternierend im Falle

$$\lambda(V(\sigma)) = \{+e_{j_0}, -e_{j_1}, \dots, (-1)^k e_{j_k}\}$$

mit aufsteigenden Indizes $j_0 < \dots < j_k$.

Der hier präsentierte Beweis basiert auf einer Idee von Frédéric Meunier [10].

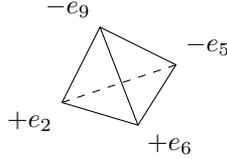


ABBILDUNG 9. Ein \oplus -alternierender Simplex.

Wir möchten zunächst zeigen, dass der Satz von Fan das Lemma von Tucker impliziert:

BEWEIS DES LEMMAS VON TUCKER, LEMMA 4.1. Für eine antipodensymmetrische Unterteilung Δ von \diamond^d betrachten wir eine antipodale Funktion

$$\lambda : V(\Delta) \rightarrow V(\diamond^{d-1}).$$

Angenommen es gäbe keine Kante $e = \text{conv}\{x, y\}$ mit $\lambda(x) = -\lambda(y)$. Dann besagt der Satz von Fan für $m = d - 1$, dass ein \oplus -alternierendes $\sigma \in \Delta$ der Dimension d existiert. Doch solch ein Simplex ist konvexe Hülle von $d + 1$ affin unabhängigen Vektoren und kann deshalb nicht durch $d + 1$ Labels aus

$$V(\diamond^{d-1}) = \{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$$

mit paarweise verschiedenen Indizes abgedeckt werden. \square

Nachweis des Satzes von Fan. Um den Satz von Fan zu beweisen, nutzen wir eine Hilfsaussage, die wir in Übungsaufgabe 8.3 nachweisen:

LEMMA 4.3. *Es seien Δ und λ wie im Satz von Fan. Dann ist ein $\sigma \in \Delta$ genau dann alternierend, wenn σ ungerade viele \oplus -alternierende Facetten hat.*

BEWEIS DES SATZES VON FAN, SATZ 4.2. Wir definieren die obere Hemisphäre von \diamond^d als

$$\begin{aligned} \diamond_+^d := \{ \text{conv}(\{\epsilon_{i_1} e_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_k} e_{i_k}\}) : 0 \leq k \leq d+1, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d+1, \\ \epsilon_{i_j} \in \{\pm 1\}, \epsilon_{d+1} = +1 \} \end{aligned}$$

und die von Δ induzierte Unterteilung von \diamond_+^d als

$$\Delta^+ := \left\{ \sigma \in \Delta : \sigma \subseteq \|\diamond_+^d\| \right\}.$$

Analog definieren wir die untere Hemisphäre \diamond_-^d und Δ^- . Der Simplicialkomplex $\Delta^+ \cap \Delta^-$ ist also die von Δ induzierte Unterteilung des „Äquators“ von \diamond^d .

Wir zeigen zuerst folgende Aussage, aus der dann das Resultat folgt:

$$(6) \quad \left| \begin{aligned} & \left\{ \sigma \in \Delta : \dim(\sigma) = d, \sigma \text{ ist } \oplus\text{-alternierend} \right\} \\ & \left\{ \tau \in \Delta^+ \cap \Delta^- : \dim(\tau) = d-1, \tau \text{ ist } \oplus\text{-alternierend} \right\} \end{aligned} \right| \pmod{2}.$$

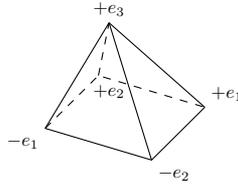


ABBILDUNG 10. Eine obere Hemisphäre.

Wir nutzen den Vektorraum

$$C_k(\Delta^+) := \mathbb{Z}_2\text{-Vektorraum mit Basis } \{e_\sigma : \sigma \in \Delta^+, \dim(\sigma) = k\}.$$

Dieser Vektorraum hat Dimension $|\{\sigma \in \Delta^+ : \dim(\sigma) = k\}|$ und man kann diesen Vektoren mit Mengen von k -dimensionalen Simplizes in Δ^+ identifizieren. Die Addition zweier Vektoren in $C_k(\Delta^+)$ entspricht dann der symmetrischen Differenz der entsprechenden Mengen.

Zusätzlich möchten wir die *Randabbildung* ∂ auf $C_k(\Delta^+)$ nutzen:

$$\begin{aligned} \partial: C_k(\Delta^+) &\rightarrow C_{k-1}(\Delta^+) \\ e_\sigma &\mapsto \sum_{\tau \text{ Facette von } \sigma} e_\tau. \end{aligned}$$

Da es sich um \mathbb{Z}_2 -Vektorräume handelt wird ein Vektor $\sum_{\sigma \in M} e_\sigma$ also auf die Summe aller e_τ abgebildet, für die τ eine Facette von ungerade vielen $\sigma \in M$ ist.

Als nächstes definieren wir die Abbildung β durch

$$\begin{aligned} \beta: C_{d-1}(\Delta^+) &\rightarrow \mathbb{Z}_2 \\ e_\tau &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } \tau \oplus\text{-alternierend,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ein Vektor $\sum_{\tau \in M} e_\tau$ wird also durch β auf Anzahl der \oplus -alternierenden Simplizes in M modulo 2 abgebildet.

Nun betrachten wir die Verkettung der beiden Abbildungen: $\alpha := \beta \circ \partial$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \alpha(e_\sigma) &= \beta \left(\sum_{\tau \text{ ist Facette von } \sigma} e_\tau \right) \\ &= |\{\tau : \tau \text{ Facette von } \sigma, \tau \text{ ist } \oplus\text{-alternierend}\}| \pmod{2}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.3 gilt $\alpha(e_\sigma) = 1$ genau dann, wenn σ alternierend ist, ansonsten ist der Funktionswert 0. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} &|\{\sigma \in \Delta^+ : \dim(\sigma) = d, \sigma \text{ alternierend}\}| \pmod{2} \\ &= \alpha \left(\sum_{\substack{\sigma \in \Delta^+, \\ \dim(\sigma) = d}} e_\sigma \right) = (\beta \circ \partial) \left(\sum_{\substack{\sigma \in \Delta^+, \\ \dim(\sigma) = d}} e_\sigma \right) \\ &= \beta \left(\sum_{\substack{\sigma \in \Delta^+, \\ \dim(\sigma) = d}} \partial(e_\sigma) \right) = \beta \left(\sum_{\substack{\tau \in \Delta^+ \cap \Delta^-, \\ \dim(\tau) = d-1}} e_\tau \right) \\ &= |\{\tau \in \Delta^+ \cap \Delta^- : \dim(\tau) = d-1, \tau \text{ ist } \oplus\text{-alternierend}\}| \pmod{2}, \end{aligned}$$

was die Gleichung (6) zeigt.

Nun folgern wir den Satz von Fan, Satz 4.2, aus (6) durch Induktion über d : Für $d = 1$ gilt Satz 4.2 offensichtlich. Gilt Satz 4.2 für $d - 1$, so ist

$$\left| \{ \tau \in \Delta^+ \cap \Delta^- : \dim(\tau) = d - 1, \tau \text{ ist } \oplus\text{-alternierend} \} \right| \bmod 2 = 1,$$

da $\Delta^+ \cap \Delta^-$ eine antipodensymmetrische Unterteilung von \diamond^{d-1} ist. Mit Gleichung (6) folgt Satz 4.2 dann auch für d . \square

5. Abstrakte Simplicialkomplexe und \mathbb{Z}_2 -Homologie

In den vorherigen Abschnitten haben wir gesehen, dass man häufig nur die kombinatorische Struktur eines Simplicialkomplexes verwendet und die unterliegende Geometrie nicht benötigt. Dies wollen wir hier präziser machen, indem wir abstrakte Simplicialkomplexe einführen. Wir werden dann aber herausfinden, dass wir zwischen ihnen und geometrischen Simplicialkomplexen eigentlich nicht zu unterscheiden brauchen.

Es sei V eine endliche Menge. Wir nennen eine Familie von Teilmengen $K \subseteq 2^V$ einen (*endlichen*) *abstrakten Simplicialkomplex*, wenn K unter Inklusion abgeschlossen ist, das heißt:

$$F' \subseteq F, F \in K \implies F' \in K.$$

Beispielsweise ist für jeden Graph $G = (V, E)$ die Menge $K = \{\emptyset\} \cup V \cup E$ ein abstrakter Simplicialkomplex.

Hat man einen geometrischen Simplicialkomplex Δ gegeben, so definiert Δ folgenden abstrakten Simplicialkomplex:

$$K(\Delta) := \{V(\sigma) : \sigma \in \Delta\}.$$

Wir nennen in dieser Situation Δ eine *geometrische Realisierung* von $K(\Delta)$. Zum Beispiel ist \diamond^1 die geometrische Realisierung von $K(\diamond^1) = \{\emptyset, \{+e_1\}, \{-e_1\}, \{+e_2\}, \{-e_2\}, \{+e_1, +e_2\}, \{+e_1, -e_2\}, \{-e_1, +e_2\}, \{-e_1, -e_2\}\}$.

Für abstrakte Simplicialkomplexe definiert man

$$\begin{aligned} V(K) &:= \bigcup_{F \in K} F, \\ \dim(F) &:= |F| - 1 \text{ für } F \in K, \\ \dim(K) &:= \max_{F \in K} \dim(F). \end{aligned}$$

Die Elemente $F \in K$ von K heißen *Simplizes*. Simplizes der Dimension 0 heißen *Knoten*, Simplizes der Dimension 1 *Kanten*.

Zu jedem abstrakten Simplicialkomplex K existiert eine geometrische Realisierung. Diese ist aber nicht eindeutig. Für einen Simplicialkomplex mit $|V(K)| = n$ Knoten kann man zum Beispiel wie folgt eine geometrische Realisierung finden: Wähle n affin unabhängige Vektoren im \mathbb{R}^{n-1} und identifiziere die Elemente aus $V(K)$ hiermit. Dann definiere die geometrische Realisierung

$$\Delta(K) := \{\text{conv}(F) : F \in K\}.$$

Durch geschicktere Konstruktionen kann man meistens geometrische Realisierungen in euklidischen Räumen kleinerer Dimension erhalten.

Wir wollen abstrakte Simplicialkomplexe untereinander vergleichen können. Hat man zu zwei abstrakten Simplicialkomplexen K und L eine Abbildung

$$f: V(K) \rightarrow V(L)$$

gegeben, so nennt man f *simplizial*, wenn jedes $F \in K$ auf einen Simplex in L abgebildet wird, wenn also stets $f(F) \in L$ gilt. Eine simpliziale Abbildung f nennt man einen *Isomorphismus*, falls f bijektiv ist und auch f^{-1} simplizial ist. Existiert

ein Isomorphismus zwischen K und L schreibt man $K \cong L$. Beispielsweise gilt offensichtlich

$$K(\diamond^1) \cong \{\emptyset, \{+1\}, \{-1\}, \{+2\}, \{-2\}, \{+1, +2\}, \{1, -2\}, \{-1, +2\}, \{-1, -2\}\}.$$

Für zwei geometrische Simplizialkomplexe Δ_1 und Δ_2 folgt für eine simpliziale Abbildung

$$f: V(K(\Delta_1)) \rightarrow V(K(\Delta_2)),$$

dass f ebenso eine simpliziale Abbildung von $V(\Delta_1)$ nach $V(\Delta_2)$ darstellt. Außerdem gilt für jeden Isomorphismus f , dass $\|f\|$ ein Homöomorphismus ist. Entsprechend folgt aus $K(\Delta_1) \cong K(\Delta_2)$, dass auch $\|\Delta_1\| \cong \|\Delta_2\|$ gilt.

Zwei geometrische Realisierungen eines abstrakten Simplizialkomplexes haben also homöomorphe Polyeder. Das bedeutet, dass jeder abstrakte Simplizialkomplex einen bis auf Homöomorphie eindeutigen topologischen Raum bestimmt.

Jeder geometrische Simplizialkomplex definiert zudem einen bis auf Isomorphie eindeutigen abstrakten Simplizialkomplex. Je nach Kontext brauchen wir zwischen abstrakten und geometrischen Simplizialkomplexen also nicht zu unterscheiden.

\mathbb{Z}_2 -Homologie. Im Beweis des Satzes von Ky Fan haben wir an vielen Stellen nur die kombinatorische Struktur der betrachteten Simplizialkomplexes verwendet, also eigentlich abstrakte Simplizialkomplexe betrachtet. Die verwendeten Methoden stammen aus dem Themengebiet der Homologie, in das wir hier kurz eintauchen.

Für ein $i \in \mathbb{N}$ sei der Kettenraum $C_i(K, \mathbb{Z}_2)$ definiert als \mathbb{Z}_2 -Vektorraum der Dimension $|\{F \in K : \dim(F) = i\}|$ mit Basis $\{e_F : F \in K, \dim(F) = i\}$. Hierzu definieren wir die lineare Randabbildung ∂_i durch

$$\begin{aligned} \partial_i: C_i(K, \mathbb{Z}_2) &\rightarrow C_{i-1}(K, \mathbb{Z}_2) \\ e_F &\mapsto \sum_{H \subseteq F, \dim(H)=i-1} e_H = \sum_{v \in F} e_{F \setminus \{v\}}. \end{aligned}$$

Eine entscheidende Eigenschaft der Randabbildungen ist es, dass die Verkettung zweier aufeinanderfolgender Randabbildungen die Nullfunktion ergibt: $\partial_i \partial_{i+1} = 0$. Denn:

$$\partial_i \partial_{i+1} e_F = \partial_i \left(\sum_{v \in F} e_{F \setminus \{v\}} \right) = \sum_{v \in F} \sum_{u \in F \setminus \{v\}} e_{F \setminus \{u, v\}} = 0,$$

da jeder Summand genau zweimal vorkommt.

$$0 \xrightarrow{\partial_3=0} \mathbb{Z}_2^{|\{F \in K: \dim(F)=2\}|} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}_2^{|\{F \in K: \dim(F)=1\}|} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}_2^{|V(K)|} \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z}_2$$

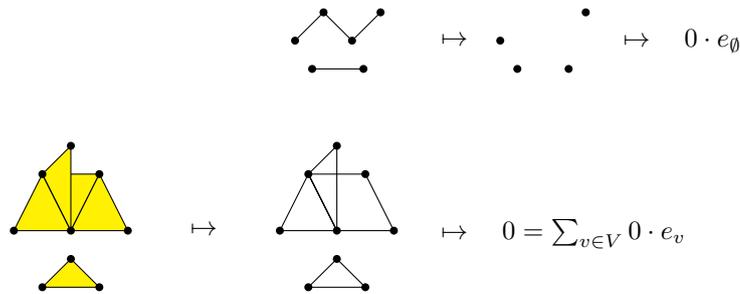


ABBILDUNG 11. \mathbb{Z}_2 -Homologie eines zweidimensionalen Komplexes.

Abbildung 11 veranschaulicht die Situation für einen Simplizialkomplex K mit Dimension 2. Die Kettenräume $C_i(K, \mathbb{Z}_2)$ sind hier dargestellt als $\mathbb{Z}_2^{|\{F \in K: \dim(F)=i\}|}$. Die Anwendung von ∂_1 auf eine Menge von Kanten ergibt eine Menge von gerade viele Knoten, weshalb bei Anwendung von ∂_0 dann auf 0 abgebildet wird. Eine Menge von Dreiecken (2-Simplizes) wird von ∂_2 auf eine Menge von Kanten abgebildet, in der jeder Knoten an gerade vielen Kanten liegt. Also erhält man bei Anwendung von ∂_1 dann die leere Menge (von Kanten), die der 0 entspricht. Die Kanten, die zuvor bei Anwendung von ∂_2 wegfallen, sind genau diejenigen, die in gerade vielen der Dreiecke liegen.

Man nennt den Kern der i -ten Randabbildung den Raum der i -dimensionalen *Zykel* und schreibt

$$Z_i(K, \mathbb{Z}_2) := \ker \partial_i = \{ \alpha \in C_i(K, \mathbb{Z}_2) : \partial_i \alpha = 0 \}.$$

Der Bild der $i + 1$ -ten Randabbildung nennt man den Raum der i -dimensionalen *Ränder*, bezeichnet mit

$$B_i(K, \mathbb{Z}_2) := \text{im} \partial_{i+1} = \{ \alpha \in C_i(K, \mathbb{Z}_2) : \exists \beta \in C_{i+1}(K, \mathbb{Z}_2) \text{ mit } \partial_{i+1} \beta = \alpha \}.$$

Da $\partial_i \partial_{i+1} = 0$, sind i -dimensionale Ränder insbesondere i -dimensionale Zykel,

$$B_i(K, \mathbb{Z}_2) \subseteq Z_i(K, \mathbb{Z}_2),$$

und der Ausdruck

$$H_i(K, \mathbb{Z}_2) := \frac{Z_i(K, \mathbb{Z}_2)}{B_i(K, \mathbb{Z}_2)}$$

ist wohldefiniert. Man nennt $H_i(K, \mathbb{Z}_2)$ die i -te *Homologiegruppe von K (über \mathbb{Z}_2)*. Fragen, die bezüglich einer solchen Homologiegruppe interessant sind, sind

- Gibt es Zykel, die keine Ränder sind?
- Gibt es „ i -dimensionale Löcher“?

Ein Beispiel für einen Zykel, der kein Rand ist, findet man in Abbildung 12.

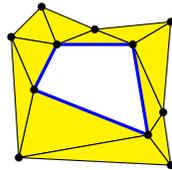


ABBILDUNG 12. In Blau: Ein Zykel, der kein Rand ist.

Mittels Homologiegruppen können Räume „auseinandergehalten“ werden, denn für $X \cong Y$ mit Triangulierungen K von X und L von Y gilt

$$H_i(K, \mathbb{Z}_2) \cong H_i(L, \mathbb{Z}_2).$$

Die andere Implikation ist im Allgemeinen nicht gegeben, das heißt Homologiegruppen können nicht zur Charakterisierung von zueinander homöomorphen Räumen benutzt werden.

6. Weitere Anwendungen des Satzes von Borsuk-Ulam

Der letzte Abschnitt dieses Kapitels enthält weitere Anwendungen des Satzes von Borsuk-Ulam. Wir betrachten zunächst allgemeine Knesergraphen, dann verschiedene Varianten des Ham-Sandwich-Theorems und Anwendungen davon.

6.1. Die chromatische Zahl allgemeinerer Knesergraphen. Man kann die Definition des Knesergraphen verallgemeinern, von k -elementigen Teilmengen von $[n]$ auf beliebige endliche Teilmengensysteme endlicher Mengen V . Hat man ein Mengensystem $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ gegeben, so definiert man den *Knesergraphen von \mathcal{F}* als

$$\text{KG}(\mathcal{F}) := \left(\mathcal{F}, \{ \{A, B\} : A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset \} \right).$$

Es gilt also $K(n, k) = \text{KG} \left(\binom{[n]}{k} \right)$.

Wir wollen eine untere Schranke für die chromatische Zahl eines allgemeinen Knesergraphen zeigen, die die Kneser-Vermutung verallgemeinert. Hierfür betrachten wir Färbbarkeit von Mengensystemen.

Ein Mengensystem \mathcal{F} heißt *2-färbbar*, falls sich die Menge V so in zwei Farben färben lässt, dass kein $F \in \mathcal{F}$ monochromatisch ist, das heißt,

$$\exists c: V \rightarrow \{\text{Rot}, \text{Blau}\}, \text{ so dass } \forall F \in \mathcal{F} : |c(F)| > 1.$$

Der *2-Färbbarkeits-Defekt* $\text{cd}_2(\mathcal{F})$ beschreibt die minimale Kardinalität einer Menge Y , die aus V entfernt werden muss, damit das Mengensystem von \mathcal{F} , das keine Punkte in Y enthält, 2-färbbar ist:

$$\text{cd}_2(\mathcal{F}) := \min \left\{ |Y| : (V \setminus Y, \{F \in \mathcal{F} : F \cap Y = \emptyset\}) \text{ ist 2-färbbar} \right\}.$$

Im übertragenden Sinne suchen wir somit eine minimale Anzahl an Punkten Y in X , die wir weiß gefärbt lassen, so dass nach einer Rot-Blau-Färbung von $X \setminus Y$ kein $F \in \mathcal{F}$ komplett rot oder blau ist (Abbildung 13).

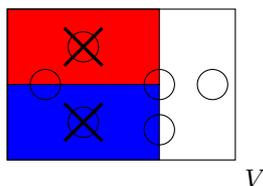


ABBILDUNG 13. Eine Illustration, welche Färbungen von Mengen $F \in \mathcal{F}$ in Hinblick auf den 2-Färbbarkeits-Defekt zulässig sind. Repräsentative Mengen F sind als Kreise dargestellt.

Man sollte beachten, dass hier die Elemente von V gefärbt werden, während Färbungen, die für die chromatische Zahl des Knesergraphen $\text{KG}(\mathcal{F})$ betrachtet werden, die Mengen $F \in \mathcal{F}$ färben.

SATZ 6.1 (Dol'nikov, 1981 [3]). *Für jedes endliche V mit $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ ist die chromatische Zahl des Knesergraphen von \mathcal{F} größer als der zugehörige 2-Färbbarkeits-Defekt,*

$$\chi(\text{KG}(\mathcal{F})) \geq \text{cd}_2(\mathcal{F}).$$

In den Übungen werden wir hierzu zeigen, dass

$$\text{cd}_2 \left(\binom{[n]}{k} \right) \geq n - 2k + 2$$

gilt, der Satz von Dol'nikov verallgemeinert also die Kneser-Vermutung. Der Beweis hierzu ist sehr ähnlich.

BEWEIS DES SATZES VON DOL'NIKOV, SATZ 6.1. Es sei d die chromatische Zahl von $\text{KG}(\mathcal{F})$, c eine d -Färbung von \mathcal{F} und n die Anzahl der Elemente in V .

Wähle wie im Beweis von Satz 2.1 ein $X \in S^d$ mit $|X| = n$, so dass je $d + 1$ Punkte aus X linear unabhängig sind. Wir identifizieren V mit X und Elemente von \mathcal{F} mit den entsprechenden Teilmengen von X :

$$F \in \mathcal{F} \quad \longleftrightarrow \quad \{x_v : v \in F\} \subseteq X.$$

Definiere für jedes $i \in [d]$ offene Mengen

$$U_i := \left\{ x \in S^d : \exists F \in \mathcal{F} \text{ mit } c(F) = i, \text{ so dass } \{x_v : v \in F\} \subseteq H(x) \right\},$$

wobei $H(x)$ wieder die offene Hemisphäre mit Zentrum x ist, vergleiche Abbildung 2. Da die U_i offen sind, ist

$$A := S^d \setminus \bigcup_{i=1}^d U_i$$

abgeschlossen. Nach Formulierung (4) des Satzes von Borsuk-Ulam existiert also ein $x \in S^d$, so dass $x, -x \in A$ oder $x, -x \in U_i$ für ein $i \in [d]$. Wäre dieses $x \in U_i$ für ein i , so existierten $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, die gleich gefärbt sind, $c(F_1) = c(F_2)$, aber leeren Schnitt haben, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, die also in $\text{KG}(\mathcal{F})$ verbunden wären. Das kann nicht sein, da c eine gültige Färbung ist.

Es muss also $x \in A$ gelten. Definiere eine Färbung \tilde{c} auf V durch

$$\tilde{c}(v) := \begin{cases} \text{Rot,} & \text{wenn } x_v \in H(x) \\ \text{Blau,} & \text{wenn } x_v \in H(-x) \\ \text{Weiß,} & \text{wenn } x_v \text{ auf dem „Äquator“ } S^d \setminus (H(x) \cup H(-x)) \text{ liegt.} \end{cases}$$

\tilde{c} ist eine gültige Färbung bezüglich des 2-Färbbarkeitsdefekts von \mathcal{F} , da es keine Mengen $F \in \mathcal{F}$ geben kann, die komplett rot oder blau gefärbt sind. Gäbe es eine solche Menge F , würde $\{x_v : v \in F\} \subseteq H(x)$ (oder $\{x_v : v \in F\} \subseteq H(-x)$) gelten und damit $x \in U_{c(F)}$ (bzw. $-x \in U_{c(F)}$).

Wie bereits im Beweis der Kneser-Vermutung gesehen, liegen höchstens d Punkte auf dem „Äquator“, also gilt

$$\text{cd}_2(\mathcal{F}) \leq d.$$

□

6.2. Das Ham-Sandwich-Theorem. Die namensgebende Aussage des Ham-Sandwich-Theorems ist, dass jedes Sandwich aus Schinken, Käse und Brot mit einem geraden Schnitt so zerteilt werden kann, dass Schinken, Käse und Brot gleichzeitig halbiert werden. Allgemeiner kann man das ausdrücken als:

SATZ 6.2 (Ham-Sandwich-Theorem). *Es seien $K_1, K_2, \dots, K_d \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakte Mengen mit $\text{vol}(K_i) > 0$ für jedes $i \in [d]$. Dann existiert eine Hyperebene H , so dass für jedes $i \in [d]$ gilt*

$$\text{vol}(H^+ \cap K_i) = \text{vol}(H^- \cap K_i) = \frac{1}{2} \text{vol}(K_i).$$

BEWEIS. Wir definieren für ein $u \in S^d$ mit $u = (\tilde{u}, c)$, $\tilde{u} \in \mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}$ die Mengen

$$\begin{aligned} H(u) &:= \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \tilde{u}^\top x = c \right\}, \\ H^+(u) &:= \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \tilde{u}^\top x \geq c \right\}, \\ H^-(u) &:= \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \tilde{u}^\top x \leq c \right\}. \end{aligned}$$

Hierdurch sind Hyperebenen und Halbräume definiert, außer im Falle $u = (0, \dots, 0, \pm 1)$.
Definiere nun die Funktion

$$f: S^d \rightarrow \mathbb{R}^d \\ u \mapsto (\text{vol}(H^+(u) \cap K_i))_{i \in [d]}.$$

Falls f stetig ist, was wir im nachfolgenden Lemma zeigen, erhalten wir durch Borsuk-Ulam ein $u \in S^d$ mit $f(u) = f(-u)$. Nun wissen wir, dass $H^+(-u) = H^-(u)$ gilt, und erhalten eine Hyperebene $H := H(u)$ mit $\text{vol}(H^+ \cap K_i) = \text{vol}(H^- \cap K_i)$. Hierbei haben wir $u = (0, \dots, 0, \pm 1)$ ausgeschlossen wegen $\text{vol}(K_i) > 0$.

Es bleibt also die Stetigkeit von f zu zeigen. \square

LEMMA 6.3. *Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und eine Funktion f gegeben durch*

$$f: S^d \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \text{vol}(H^+(u) \cap K).$$

Dann ist f stetig.

BEWEIS. Wir machen zunächst folgende Beobachtung: Für Mengen A, B gilt

$$|\text{vol}(A) - \text{vol}(B)| \leq \text{vol}(A \Delta B).$$

Dies gilt, da wegen $B \subseteq A \cup B \setminus A$ folgt, dass $\text{vol}(B \setminus A) \geq \text{vol}(A) - \text{vol}(B)$. Eine analoge Aussage gilt für A , so dass:

$$|\text{vol}(A) - \text{vol}(B)| \leq \max(\text{vol}(A \setminus B), \text{vol}(B \setminus A)) \leq \text{vol}(A \setminus B) + \text{vol}(B \setminus A) = \text{vol}(A \Delta B).$$

Jetzt machen wir uns an den Beweis des Lemmas. Betrachte eine Folge in S^d , die gegen einen Punkt u konvergiert:

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u.$$

Es gilt mit obiger Beobachtung:

$$|f(u) - f(u_n)| = \left| \text{vol}(H^+(u) \cap K) - \text{vol}(H^+(u_n) \cap K) \right| \\ \leq \text{vol}\left((H^+(u) \cap K) \Delta (H^+(u_n) \cap K)\right).$$

Es genügt nun für $K_n := (H^+(u) \cap K) \Delta (H^+(u_n) \cap K)$ zu zeigen, dass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \text{vol}(K_n) = 0.$$

Es gilt dann nämlich

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |f(u) - f(u_n)| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \text{vol}(K_n) = 0$$

und damit $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(u) - f(u_n)| = 0$.

Betrachte hierfür die Mengen

$$D_n := \bigcup_{i \geq n} K_i,$$

eine bezüglich der Inklusion absteigende Folge von Mengen: $D_n \supseteq D_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\text{vol}(K_i) \leq \text{vol}(D_n)$ für alle $i \geq n$. Also haben wir:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \text{vol}(K_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \geq n} \text{vol}(K_i) \\ \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{vol}(D_n) \\ = \text{vol}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\right).$$

Wir möchten nun zeigen, dass

$$D := \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \subseteq H(u) \cap K$$

gilt, denn $H(u) \cap K$ hat Volumen 0 und somit wären wir fertig.

Dies zeigen wir via Kontraposition. Es sei $x \notin H(u) \cap K$. Dann ist $x \notin H(u)$ oder $x \notin K$. Ist $x \notin K$, so ist x auch nicht in D , da $D \subseteq K$. Ist x nicht in $H(u)$, so liegt x in einer der Halbräume $H^+(u)$ oder $H^-(u)$. Wir betrachten den Fall $x \in H^+(u)$, der andere Fall kann analog behandelt werden. Da $x \in H^+(u) \setminus H(u)$ gilt

$$\tilde{u}^\top x < c.$$

Da x fest ist und u_n gegen u konvergiert, konvergiert $\tilde{u}_n^\top x$ gegen $\tilde{u}^\top x$ und c_n gegen c . Also folgt für ausreichend großes n

$$\tilde{u}_n^\top x \leq c_n.$$

Entsprechend ist $x \in H^+(u_n)$ für solch ein n , genauer

$$\exists n \forall i \geq n : x \in H^+(u_i).$$

Dann haben wir ein $x \in K$, welches sowohl in $H^+(u)$ als auch in $H^+(u_i)$ liegt, also insbesondere

$$x \notin (H^+(u) \Delta H^+(u_i)) \cap K = K_i,$$

das bedeutet

$$x \notin \bigcup_{i \geq n} K_i = D_n,$$

folglich

$$x \notin D.$$

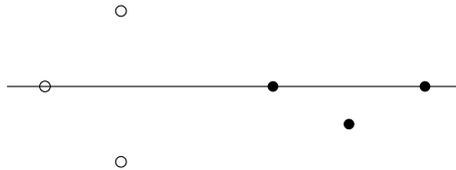
□

6.3. Diskrete Varianten des Ham-Sandwich-Theorems. Bislang haben wir nur kompakte Mengen mit „echtem“ Volumen betrachtet. Wir schauen nun, wie sich die Aussage des Ham-Sandwich-Theorems auf diskrete Punktmengen übertragen lässt.

SATZ 6.4 (Ham-Sandwich-Theorem, diskret). *Es seien $A_1, \dots, A_d \subseteq \mathbb{R}^d$ endliche Mengen. Dann existiert eine Hyperebene H , so dass H jedes A_i für $i \in [d]$ halbiert, das heißt beide durch H definierte offenen Halbräume H_o^+ und H_o^- enthalten höchstens $\lfloor \frac{1}{2} |A| \rfloor$ -viele Elemente von A .*

Im Fall, dass A ungerade viele Elemente hat, muss die Hyperebene H also durch mindestens einen Punkt laufen.

BEMERKUNG. Es wäre vielleicht intuitiver, Punkte auf H halb zu H_o^- und halb zu H_o^+ dazuzurechnen. Das geht aber im Allgemeinen nicht. Zum Beispiel findet man zwei Mengen im \mathbb{R}^2 , die nicht in diesem Sinne halbiert werden können:



BEWEIS VON SATZ 6.4. Die Idee des Beweises ist es, alle Punkte der endlichen Menge A durch kleine Kugeln zu ersetzen und anschließend das ursprüngliche Ham-Sandwich-Theorem, Satz 6.2, anzuwenden.

Wir beobachten zuerst, dass wir annehmen können, dass alle A_i ungerade viele Punkte enthalten. Sonst können wir einen Punkt aus jedem A_i mit gerade vielen

Punkten entfernen, die neuen Mengen durch eine Hyperebene H halbieren und die entfernten Punkte wieder hinzufügen. H halbiert auch die ursprünglichen Mengen.

Wir betrachten nun zwei Fälle. Es seien zunächst die A_i paarweise disjunkt und die disjunkte Vereinigung $A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_d$ in *allgemeiner Lage*, das heißt, jede Hyperebene enthält höchstens d Punkte. Definiere die neuen Mengen

$$A_i^\varepsilon := \bigcup_{x \in A_i} B_\varepsilon(x).$$

und wähle hierbei das $\varepsilon > 0$ so klein, dass weiterhin jede Hyperebene höchstens d Kugeln aus $\bigcup_{i \in [d]} A_i^\varepsilon$ schneidet. Jetzt wende Satz 6.2 auf die Mengen $A_1^\varepsilon, \dots, A_d^\varepsilon$ an.

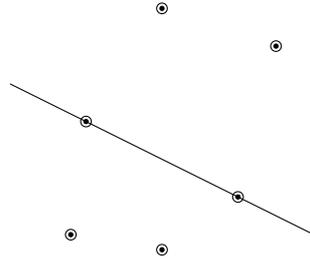


ABBILDUNG 14. Veranschaulichung eines A_i^ε .

Dann existiert eine Hyperebene H mit

$$\text{vol}(H^+ \cap A_i^\varepsilon) = \text{vol}(H^- \cap A_i^\varepsilon) = \frac{1}{2} \text{vol}(A_i^\varepsilon)$$

für alle $i \in [d]$. Da jedes A_i^ε ungerade viele Kugeln enthält, schneidet H mindestens eine Kugel aus jedem A_i^ε . Da H höchstens d Kugeln schneidet und es d Mengen $A_1^\varepsilon, \dots, A_d^\varepsilon$ gibt, schneidet H also genau eine Kugel aus jedem A_i^ε . Da H jedoch jedes A_i^ε halbiert, wird jede auf H liegende Kugel von H halbiert und das Zentrum jeder Kugel muss auf H liegen. Damit halbiert H aber auch jedes der A_i .

Nun betrachte den zweiten Fall, dass die A_i in beliebiger Lage sind. Für jedes $\delta > 0$ können wir alle Punkte um höchstens δ verschieben und eine Punktmenge in allgemeiner Lage erhalten. Die zugehörigen Mengen bezeichnen wir mit $A_{i,\delta}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei nun H_n die Hyperebene, die alle $A_{i,\frac{1}{n}}$ halbiert,

$$H_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : u_n^\top x = c_n \right\} \text{ mit } \|u_n\| = 1.$$

Die c_n , $n \in \mathbb{N}$, befinden sich in einem abgeschlossenen Intervall, also liegen die Punkte (u_n, c_n) in einer kompakten Menge und die Folge $((u_n, c_n))_{n \in \mathbb{N}}$ hat einen Häufungspunkt (u, c) . Es existiert also eine Teilfolge mit

$$(u_{n_j}, c_{n_j}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} (u, c).$$

Definiere die Hyperebene

$$H := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : u^\top x = c \right\}.$$

Es sei $x \in \mathbb{R}^d$ mit $|u^\top x - c| = \delta > 0$. Für j ausreichend groß gilt

$$|u_{n_j}^\top x - c_{n_j}| \geq \frac{\delta}{2}.$$

Das heißt für $x \in H_o^{+/-}$ folgt $x \in (H_{n_j})_o^{+/-}$ und $B_{\frac{1}{n_j}}(x) \subseteq (H_{n_j})_o^{+/-}$ für j ausreichend groß. (Siehe Abbildung 15.)

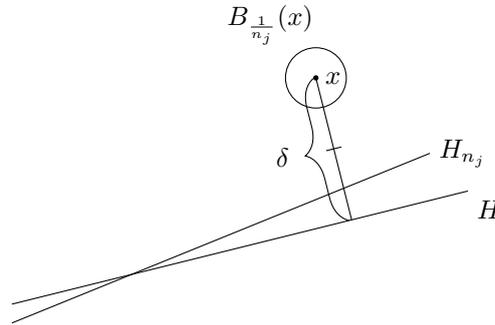


ABBILDUNG 15. Ein Punkt in H_o^+ (oder H_o^-)

Wegen $|A_i \cap H_o^{+/-}| = k$ gilt $|A_{i, \frac{1}{n_j}} \cap H_o^{+/-}| \geq k$, und somit $k \leq \lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$. H halbiert also alle A_i . \square

Für Punkte in allgemeiner Lage bekommen wir sogar ein genaueres Resultat:

KOROLLAR 6.5. *Es seien $A_1, \dots, A_d \subseteq \mathbb{R}^d$ paarweise disjunkte, endliche Mengen, so dass $A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_d$ in allgemeiner Lage ist. Dann existiert eine Hyperebene H , die jedes A_i so halbiert, dass*

$$\left| H_o^{+/-} \cap A_i \right| = \left\lfloor \frac{1}{2}|A_i| \right\rfloor \quad \text{und} \quad |H \cap A_i| \leq 1$$

für jedes $i \in [d]$.

Für den Fall, dass alle A_i ungerade viele Punkte haben, haben wir dies schon im vorangegangenen Beweis gesehen.

BEWEIS. Auf H aus Satz 6.4 können zu viele Punkte liegen. Wähle ein Koordinatensystem so, dass H horizontal ist, in unserem Fall so, dass

$$H = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : x_d = 0 \right\}.$$

Definiere den Schnitt

$$B := H \cap (A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_d),$$

dann gilt $|B| \leq d$. Für jedes $b \in B$ entscheide, ob b oberhalb, unterhalb oder auf der neuen Hyperebene liegen soll, so dass die neue Hyperebene anschließend die Behauptung erfüllt.

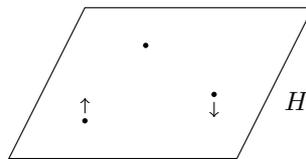


ABBILDUNG 16. Punkte auf der Hyperebene H und Markierungen der Lage bezüglich der neuen Hyperebene

Falls $|B| \neq d$, wähle $d - |B|$ beliebige Punkte auf H mit $C = B \cup \{\text{diese Punkte}\}$ affin unabhängig. Definiere für jedes $x \in C$ ein x_ε durch:

$$x_\varepsilon := \begin{cases} x, & \text{falls } x \in B, x \text{ soll bleiben, oder falls } x \notin B, \\ x - \varepsilon e_d, & \text{falls } x \in B \text{ oberhalb liegen soll,} \\ x + \varepsilon e_d, & \text{falls } x \in B \text{ unterhalb liegen soll.} \end{cases}$$

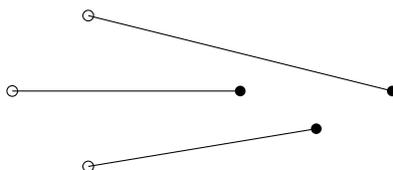
Für die Menge $\{x_\varepsilon : x \in C\}$ existiert eine Hyperebene H_ε mit $x_\varepsilon \in H_\varepsilon$ für alle $x \in C$. Falls ε klein genug ist, so ist $\{x_\varepsilon : x \in C\}$ auch affin unabhängig, also H_ε eindeutig bestimmt. Jedes $x \in (A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_d) \setminus B$ liegt so wie vorher. \square

6.4. Anwendungen des Ham-Sandwich-Theorems.

SATZ 6.6. *Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ in allgemeiner Lage die disjunkte Vereinigung von d -vielen n -elementigen Mengen A_j , insbesondere $|X| = d \cdot n$. Dann ist X die disjunkte Vereinigung von n -vielen d -elementigen Mengen B_i , so dass*

- $|B_i \cap A_j| = 1$ für alle $i \in [n]$ und $j \in [d]$,
- $\text{conv}(B_i) \cap \text{conv}(B_j) = \emptyset$ für $i \neq j$.

Als Beispiel für $n = 3$ und $d = 2$ haben wir



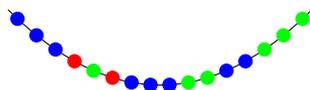
BEWEIS. Wir beweisen den Satz mittels Induktion über n :

Für $n = 1$ ist die Aussage trivial. Es sei $n > 1$. Nach Korollar 6.5 können wir eine Hyperebene H finden, die alle A_i halbiert. Ist n gerade, so enthält H keine Punkte von X , finde also $B_1, \dots, B_{\frac{n}{2}}$ in H_o^+ und $B_{\frac{n}{2}+1}, \dots, B_n$ in H_o^- nach Induktionsvoraussetzung. Ist anderenfalls n ungerade, so enthält H genau einen Punkt aus jedem A_i . Definiere

$$B_n := |H \cap X|$$

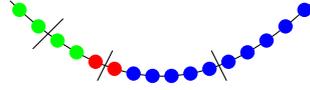
und finde $B_1, \dots, B_{\frac{n-1}{2}}$ in H_o^+ und $B_{\frac{n-1}{2}+1}, \dots, B_{n-1}$ in H_o^- nach Induktionsvoraussetzung. \square

Das Halskettenproblem (Necklace Problem).



Hier stellen wir uns vor, dass zwei Diebe eine offene Halskette mit d verschiedenen Edelsteinsorten erbeutet haben, wobei es von jedem Edelstein eine gerade Anzahl gibt. Die Edelsteine lassen sich nicht von der Kette entfernen. Die Diebe möchten die Halskette so zerschneiden, dass beide gleich viele Edelsteine jeder Sorte haben. Die Frage ist, wie viele Schnitte dazu maximal notwendig sind, wenn die Reihenfolge der Edelsteine unbekannt ist.

Hat man den Fall, dass alle Edelsteine der Sorte nach geordnet sind, so erkennt man, dass d Schnitte nötig sind:



Dies ist auch die maximal nötige Anzahl an Schnitten:

SATZ 6.7. *Die zwei Diebe benötigen höchstens d Schnitte.*

BEWEIS. Der Beweis nutzt die *Momentenkurve*

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ t &\mapsto (t, t^2, \dots, t^d). \end{aligned}$$

Für jede Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^d : u^\top x = c\}$ gilt $\gamma(t) \in H$ genau dann, wenn

$$c = u^\top \gamma(t) = \sum_{i=1}^d u_i t^i.$$

Es gilt also $|H \cap \text{im}(\gamma)| \leq d$. Falls Gleichheit gilt, dann wechselt die Kurve γ in jedem Schnittpunkt die Seiten von H .

Es seien insgesamt N Edelsteine S_1, \dots, S_N an der Halskette, deren Indizes von links nach rechts aufsteigen. Wähle reelle Zahlen $t_1 < t_2 < \dots < t_N$ und betrachte

$$X := \{\gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots, \gamma(t_N)\}$$

sowie die Mengen

$$A_i := \{\gamma(t_j) : S_j \text{ ist Edelstein der Sorte } i\}.$$

X ist in allgemeiner Lage und die A_i sind disjunkt, also existiert nach Korollar 6.5 eine Hyperebene H mit

$$\underbrace{|H_o^+ \cap A_i|}_{\text{Dieb 1}} = \underbrace{|H_o^- \cap A_i|}_{\text{Dieb 2}} = \frac{1}{2}|A_i|$$

für alle $i \in [d]$. (Da alle A_i eine gerade Anzahl an Elementen hatten, enthält H keine Punkte aus einer der Mengen A_i .) H schneidet $\text{im}(\gamma)$ in höchstens d Punkten. \square

Literatur zu Kapitel 3

- [1] I. Bárány, *A short proof of Kneser's conjecture*, J. Combinatorial Theory, Ser. B **25** (1978), 325–326.
- [2] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre*, Fundamenta Mathematicae **20** (1933), 177–190.
- [3] V.L. Dol'nikov, *Transversals of families of sets*, In: Studies in the theory of functions of several real variables (Russian) (1981), 30–36.
- [4] K. Fan, *A generalization of Tucker's combinatorial lemma with topological applications*, Ann. Math. **56** (1952), 431–437.
- [5] J.E. Greene, *A new short proof of Kneser's conjecture*, American Math. Monthly **109** (2002), 918–920.
- [6] M. Kneser, *Aufgabe 360*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **58** (1955), 27.
- [7] M. de Longueville, *A Course in Topological Combinatorics*, Universitext, Springer-Verlag, Heidelberg, 2013.
- [8] L. Lovász, *Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy*, J. Combinatorial Theory, Ser. B **25** (1978), 319–324.
- [9] J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Heidelberg, 2003.
- [10] F. Meunier, *A Z_q -Fan formula*, Preprint, Les cahiers Leibniz no. 143, Laboratoire Leibniz-IMAG, Grenoble, 2005.
- [11] A.W. Tucker, *Some topological properties of disk and sphere*, Proc. First Canadian Math. Congress, Montreal, (1945), 285–309.

Fourier-Analyse in endlichen abelschen Gruppen

1. Grundlagen

Es sei $(G, +)$ eine endliche abelsche Gruppe.

BEISPIEL 1.1. *Zu den endlichen abelschen Gruppen zählen:*

- a) Die zyklische Gruppe $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- b) Die Gruppe der multiplikativen Inversen von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \{a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \exists b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \text{ so dass } ab = 1(n)\}.$$

SATZ 1.2 (Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen). *Jede endliche Gruppe G ist isomorph zu einem direkten Produkt aus zyklischen Gruppen, das heißt, es existieren $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$, so dass*

$$G \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}.$$

Wir werden den Hauptsatz in dieser Vorlesung nicht beweisen. Es ist ein Satz aus der lineare Algebra über dem Ring \mathbb{Z} . Sehr elegant kann man ihn mit Hilfe der Theorie der Moduln über Hauptidealringen beweisen. Die algorithmische Variante ist als Smith-Normalform bekannt.

DEFINITION 1.3. a) Die Gruppe

$$(\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} = 1\}, \cdot)$$

bezeichnen wir als den Torus von \mathbb{C} .

b) Eine Abbildung $\chi: G \rightarrow \mathbb{T}$, die

$$\chi(x + y) = \chi(x)\chi(y)$$

für alle $x, y \in G$ erfüllt, heißt Charakter von G . Insbesondere, ist χ also ein Gruppenhomomorphismus.

BEISPIEL 1.4. *Folgende Charaktere werden in unserer Fourier-Analyse viel Verwendung finden:*

- a) Die Abbildung χ_0 , die alle $x \in G$ auf das neutrale Element $1 \in \mathbb{T}$ schickt, $\chi_0(x) = 1$, heißt der triviale Charakter von G .
- b) Für jedes $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist

$$\chi_a(x) = e^{\frac{2\pi i a x}{n}}$$

ein Charakter der zyklischen Gruppe $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Dies sind sogar alle Charaktere von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, denn die Menge $\{\chi_a : a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ ist eine Orthonormalbasis des Vektorraums

$$\mathbb{C}^G = \{f: G \rightarrow \mathbb{C}\}$$

mit Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x)\overline{g(x)}.$$

Dies kann man durch direktes Nachrechnen verifizieren. Für $a, b \in G$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle \chi_a, \chi_b \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} e^{\frac{2\pi i a x}{n}} e^{-\frac{2\pi i b x}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{x=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i (a-b)x}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{x=0}^{n-1} q^x \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n} \frac{1-q^n}{1-q}, & \text{falls } q \neq 1, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Hierbei wurde $q = e^{\frac{2\pi i (a-b)}{n}}$ gesetzt und die Partialsummenformel für die geometrische Reihe genutzt. Wegen $q^n = 1$ für $q \neq 1$, und $q \neq 1$ genau dann, wenn $a \neq b$, folgt die Behauptung. Dass dies tatsächlich alle Charaktere sind, folgt mit Satz 1.6, den wir gleich formulieren und beweisen werden.

LEMMA 1.5. Die duale Gruppe

$$\widehat{G} := \{\chi : \chi \text{ ist Charakter von } G\}$$

ist eine abelsche Gruppe mit Multiplikation

$$(\chi\psi)(x) = \chi(x)\psi(x).$$

BEWEIS. Dieses Lemma wird in Übungsaufgabe 10.1 a) bewiesen. \square

SATZ 1.6. Die Charaktere von G sind orthonormal in \mathbb{C}^G .

BEWEIS. Einerseits gilt

$$\langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \chi(x) \overline{\chi(x)} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} |\chi(x)|^2 = 1.$$

Andererseits hat man für einen nicht-trivialen Charakter $\chi \neq \chi_0$:

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = 0,$$

weil für jedes $y \in G$ mit $\chi(y) \neq 1$ gilt:

$$\chi(y) \sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(y+g) = \sum_{x \in G} \chi(x).$$

Sei nun $\psi \neq \chi$ ein weiterer Charakter von G . Dann ist $\chi\psi^{-1} \neq \chi_0$, und somit

$$|G| \langle \chi, \psi \rangle = \sum_{x \in G} (\chi\psi^{-1})(x) = 0.$$

\square

SATZ 1.7. Die Charaktere von G bilden sogar eine Orthonormalbasis des \mathbb{C}^G .

Das könnte man durch Anwendung von Satz 1.2 sehr schnell nachweisen. Hier machen wir das anders: mit weniger Algebra, dafür mit mehr Analysis.

LEMMA 1.8. Es sei V ein unitärer Vektorraum endlicher Dimension. Es seien T_1, \dots, T_k unitäre Transformationen, die paarweise kommutieren, das heißt

- i) $(T_v, T_w) = (v, w)$ für alle $v, w \in V$,
- ii) $T_i T_j = T_j T_i$ für alle $i, j \in [k]$.

Dann lassen sich T_1, \dots, T_k simultan diagonalisieren, also gibt es eine Basis von V , die aus Eigenvektoren von T_1, \dots, T_k besteht.

BEWEIS. Per Induktion über k . Für $k = 1$ handelt es sich um den Satz über die Spektralzerlegung, der aus der linearen Algebra bekannt ist. Es sei also $k > 1$. Wir wenden den Satz über die Spektralzerlegung auf T_k an und erhalten die Zerlegung

$$V = \bigoplus_{i=1}^s V_{\lambda_i},$$

wobei $V_{\lambda_i} = \text{Eig}(T_k, \lambda_i)$ gilt. Für beliebiges $v \in V_{\lambda_i}$ und $j \in [k-1]$ gilt

$$T_k T_j(v) = T_j T_k(v) = T_j(\lambda_i v) = \lambda_i T_j(v),$$

das heißt $T_j(v) \in V_{\lambda_i}$ für $v \in V_{\lambda_i}$. Nun können wir die Induktionsvoraussetzung auf $T_1|_{V_{\lambda_i}}, \dots, T_{k-1}|_{V_{\lambda_i}}$ anwenden, und erhalten eine Basis aus Eigenvektoren von T_1, \dots, T_{k-1} für den Untervektorraum V_{λ_i} . Entsprechend also auch für ganz V . \square

BEWEIS VON SATZ 1.7. Betrachte den Vektorraum $V = \mathbb{C}^G$, der Dimension $|G|$ besitzt. Für jedes $x \in G$ definiere $T_x: V \rightarrow V$ durch

$$(T_x f)(y) = f(x, y), \quad y \in G.$$

Weil G abelsch ist, gilt $T_x T_y = T_y T_x$ für alle $x, y \in G$. Außerdem ist T_x unitär:

$$\begin{aligned} \langle T_x f, T_x g \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{z \in G} T_x f(z) \overline{T_x g(z)} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{z \in G} f(x+z) \overline{g(x+z)} \\ &= \langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen für Lemma 1.8 sind erfüllt und man kann die Familie T_x , mit $x \in G$, simultan diagonalisieren. Es sei v_y , mit $y \in G$, eine solche Basis von V . Dann gilt $v_y(0) \neq 0$, denn wenn es nicht so wäre, hätte man

$$v_y(x) = v_y(x+0) = (T_x v_y)(0) = \lambda_x v_y(0) = 0,$$

wobei λ_x der Eigenwert von T_x von v_y ist, also $v_y = 0$, was nicht sein kann.

Wir möchten nun noch zeigen, dass

$$w(x) = \lambda_x = \frac{v_y(x)}{v_y(0)}$$

ein Charakter von G ist, denn dann liefert jeder Basisvektor v_y einen Charakter von G und die Behauptung folgt: Es ist $w(x) \neq 0$ für jedes $x \in G$, was man mit dem obigen Argument einsieht. Des Weiteren hat man

$$w(a+b) = \frac{v_y(a+b)}{v_y(0)} = \frac{\lambda_a v_y(b)}{v_y(0)} = \lambda_a \lambda_b \frac{v_y(0)}{v_y(0)} = \lambda_a \lambda_b = w_a w_b.$$

Daraus folgt mit Aufgabe 10.1 (b), dass $w(x) \in \mathbb{T}$. Also ist w ein Charakter. \square

BEMERKUNG. Der Beweis gibt einen Algorithmus an, um alle Charaktere von G zu bestimmen.

DEFINITION 1.9. Es sei $f \in \mathbb{C}^G$. Die Funktion $\widehat{f} \in \mathbb{C}^{\widehat{G}}$ definiert durch

$$\widehat{f}(\chi) = \langle f, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \overline{\chi(x)}$$

heißt die (diskrete) Fouriertransformierte von f . Der Koeffizient $\widehat{f}(\chi)$ heißt der Fourierkoeffizient von f bei χ .

SATZ 1.10. Es seien $f, g \in \mathbb{C}^G$. Dann gelten

a) (*Fourier-Inversion*)

$$f(x) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \chi(x).$$

b) (*Parseval-Plancherel-Formel*)

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \overline{\widehat{g}(\chi)}.$$

BEWEIS. Zu a): Da die Charaktere eine Basis des \mathbb{C}^G bilden, gibt es Koeffizienten $c_\chi \in \mathbb{C}$ mit

$$f(x) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} c_\chi \chi(x).$$

Wegen der Orthonormalität folgt:

$$\widehat{f}(\chi) = \langle f, \chi \rangle = c_\chi.$$

Zu b): Es gilt

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \overline{g(x)} \\ &\stackrel{a)}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \left(\sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \chi(x) \right) \overline{\left(\sum_{\psi \in \widehat{G}} \widehat{g}(\psi) \psi(x) \right)} \\ &= \sum_{\chi, \psi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \widehat{g}(\psi) \underbrace{\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \chi(x) \overline{\psi(x)}}_{=\langle \chi, \psi \rangle} \\ &= \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \overline{\widehat{g}(\chi)}, \end{aligned}$$

wobei bei der letzten Gleichheit die Orthonormalbasiseigenschaft aus Satz 1.7 ausgenutzt wurde. \square

DEFINITION 1.11. *Es seien $f, g \in \mathbb{C}^G$. Ihre Faltung (Konvolution) ist definiert als $f * g \in \mathbb{C}^G$ mit*

$$(f * g)(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} f(y) g(x - y).$$

SATZ 1.12. *Es seien $f, g \in \mathbb{C}^G$. Es gilt*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} * \widehat{g},$$

das heißt

$$(\widehat{f * g})(\chi) = \widehat{f}(\chi) \widehat{g}(\chi).$$

BEWEIS. Folgende Gleichungsfolge ist gültig, wobei in der dritten Gleichung die Substitution $x + y$ für x durchgeführt wird:

$$\begin{aligned} (\widehat{f * g})(\chi) &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} (f * g)(x) \overline{\chi(x)} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} f(y)g(x - y) \overline{\chi(x)} \\ &= \frac{1}{|G|^2} \sum_{x \in G} g(x) \overline{\chi(x)} \sum_{y \in G} f(y) \overline{\chi(y)} \\ &= \widehat{f}(\chi) \widehat{g}(\chi). \end{aligned}$$

□

2. Erste Anwendung: Dreiecksschnittfamilien von Graphen

2.1. Die Vermutung von Simonovits und Sós.

DEFINITION 2.1. *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Definiere den vollständigen Graphen K_n auf n Knoten durch*

$$K_n = ([n], \{\{i, j\} : i \neq j, i, j \in [n]\}).$$

Es ist in diesem Abschnitt $E = E(K_n) = \binom{[n]}{2}$ die Kantenmenge des vollständigen Graphen mit $|E(K_n)| = \binom{n}{2}$.



ABBILDUNG 1. Die vollständigen Graphen K_4 und K_5 .

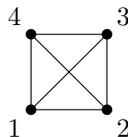
DEFINITION 2.2. *Es sei $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ eine Familie von Teilgraphen des K_n (codiert durch die Menge der Kanten). Die Familie \mathcal{F} heißt n -Dreiecksschnittfamilie von Graphen, falls für je zwei Elemente $G, H \in \mathcal{F}$ gilt, dass sie ein gemeinsames Dreieck enthalten, das heißt,*

$$\exists e, f, g \in G \cap H : |e \cap f| = |f \cap g| = |g \cap e| = 1.$$

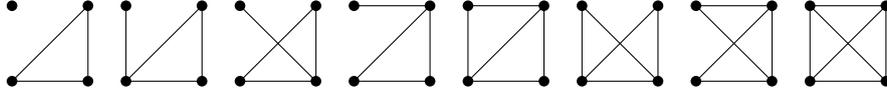
BEISPIEL 2.3. *Definiere die fixierte n -Dreiecksschnittfamilie \mathcal{F}_0 durch*

$$\mathcal{F}_0 = \{G \in 2^E : \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\} \subseteq G\}.$$

Dann ist $|\mathcal{F}_0| = \frac{1}{8} 2^{\binom{n}{2}}$. Für $n = 4$ sei der K_4 gegeben durch



Dann liegen in \mathcal{F}_0 folgende Teilgraphen:



VERMUTUNG (Simonovits, Sós, 1976). *Die n -Dreiecksschnittfamilie \mathcal{F}_0 ist extremal.*

Diese Vermutung konnte 2012 bewiesen werden:

SATZ 2.4 (Ellis, Filmus, Friedgut, 2012, [1]). *Es sei \mathcal{F} eine n -Dreiecksschnittfamilie von Graphen. Dann gilt*

$$|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{F}_0| = \frac{1}{8} 2^{\binom{n}{2}}.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn \mathcal{F} fixiert ist.

Wir zeigen nur die erste Aussage des Satzes, die andere kann man aber relativ einfach zeigen. Hierfür benötigen wir jedoch noch einige Vorbereitungen.

2.2. Vorbereitungen.

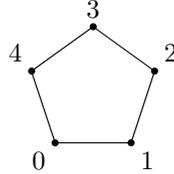
DEFINITION 2.5. *Es sei G eine endliche, abelsche Gruppe und es sei $\Sigma \subseteq G$ mit $\Sigma = -\Sigma$. Definiere den Cayleygraphen*

$$\Gamma = (V, E) = \text{Cayley}(G, \Sigma)$$

durch

$$V = G, \quad E = \{\{x, y\} : x - y \in \Sigma\}.$$

Für $G = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $\Sigma = \{+1, -1\}$ hat man zum Beispiel einen C_5 :



Im Cayleygraphen sind die Nachbarn von $x \in G$ stets $x + \Sigma$.

LEMMA 2.6. *Es sei $A \in \mathbb{R}^{G \times G}$ die Adjazenzmatrix eines Cayleygraphen $\Gamma = \text{Cayley}(G, \Sigma)$.*

a) *Für jedes $f \in \mathbb{C}^G$ gilt*

$$(7) \quad Af = |G| \mathbf{1}_\Sigma * f,$$

wobei $\mathbf{1}_\Sigma \in \mathbb{C}^G$ die charakteristische Funktion von Σ ist.

b) *Die Eigenvektoren von A sind die Charaktere von $\chi \in \widehat{G}$ und die zugehörigen Eigenvektoren lauten $|G| \widehat{\mathbf{1}}_\Sigma(\chi)$.*

Operatoren mit der Eigenschaft 7 nennt man in der Fourier-Analyse auch *Faltungsooperatoren*.

BEWEIS. Zu a): Es ist einerseits

$$(Af)(x) = \sum_{z: \{x,z\} \in E} f(z) = \sum_{z \in x + \Sigma} f(z)$$

und andererseits

$$\begin{aligned} (1_\Sigma * f)(x) &= \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} 1_\Sigma(y) f(x-y) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{y \in \Sigma} \underbrace{f(x-y)}_{=z} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{z \in x+\Sigma} f(z), \end{aligned}$$

wobei bei der Substitution genutzt wurde, dass $\Sigma = -\Sigma$ gilt.

Zu b): Wir verifizieren direkt:

$$\begin{aligned} |G|(1_\Sigma * \chi)(x) &= |G| \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} 1_\Sigma(y) \chi(x-y) \\ &= \sum_{y \in G} 1_\Sigma(y) \chi(x) \overline{\chi(y)} \\ &= |G| \widehat{1_\Sigma}(\chi) \chi(x). \end{aligned}$$

□

KOROLLAR 2.7. a) *Zu Satz 1.5 aus Kapitel 1: Für den Cayleygraphen hat man*

$$\alpha(\text{Cayley}(G, \Sigma)) \leq \frac{-|G|\lambda_{\min}}{|\Sigma| - \lambda_{\min}}.$$

Dies lässt sich mit $|\Sigma| = |G|\widehat{1_\Sigma}(\chi_0)$ und Lemma 2.6 b) schreiben als

$$\alpha(\text{Cayley}(G, \Sigma)) \leq \frac{-|G| \min_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{1_\Sigma}(\chi)}{\widehat{1_\Sigma}(\chi_0) - \min_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{1_\Sigma}(\chi)}.$$

b) *Mittels des Beweises von Satz 1.5 aus Kapitel 1 erhält man dann noch folgendes Resultat: Es sei $w \in \mathbb{R}^G$ mit $w(x) = w(-x)$ für alle $x \in G$ und $w(x) = 0$ für $x \notin \Sigma$ (das heißt, $\text{supp } w \subseteq \Sigma$). Es sei zusätzlich $\widehat{w}(\chi_0) = 1$ und $-1 < \min_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{w}(\chi) < 0$. Dann gilt*

$$\alpha(\text{Cayley}(G, \Sigma)) \leq \frac{-|G| \min_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{w}(\chi)}{\widehat{w}(\chi_0) - \min_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{w}(\chi)}.$$

2.3. Beweis der Vermutung durch Ellis, Filmus und Friedgut. Der Beweis ist eine Erweiterung der Strategie von Lovász zum Beweis vom Satz von Erdős-Ko-Rado:

- Formuliere das Dreiecksschnittfamilienproblem als Unabhängigkeitsproblem in einem Cayleygraphen.
- Wähle w aus Korollar 2.7 b) so geschickt, dass die obere Schranke scharf ist. Die optimale Wahl von w kann man hierbei durch ein lineares Programm lösen.

Ab jetzt werden wir *hemmungslos* Elemente aus \mathbb{F}_2^E mit Teilgraphen $G \subseteq K_n$ identifizieren.

Betrachte den Cayleygraphen

$$\Gamma = \text{Cayley} \left(\mathbb{F}_2^E, \{ \overline{B} : B \subseteq K_n, B \text{ ist bipartit} \} \right),$$

das heißt, G und F sind adjazent in Γ , falls

$$G \quad \underbrace{\oplus}_{\text{Addition mod 2}} \quad F = G \quad \underbrace{\triangle}_{\text{Symmetrische Differenz}} \quad F = \overline{B}$$

für einen bipartiten Graphen $B \subseteq K_n$ gilt.

LEMMA 2.8. *n -Dreiecksschnittfamilien sind unabhängige Mengen in Γ .*

BEWEIS. Übungsaufgabe 11.3. □

Allerdings gibt es auch nicht-triviale unabhängige Mengen in Γ , die nicht n -Dreiecksschnittfamilien sind. Wir fragen uns: Welche $w \in \mathbb{R}^E$ mit $\text{supp } w \subseteq \mathcal{B}'$ und

$$\mathcal{B}' = \{\overline{B} : B \subseteq K_n \text{ bipartit}\}$$

sind möglich?

LEMMA 2.9. *Die Charaktere von $(\mathbb{F}_2^E, +)$ lauten für $F, G \subseteq K_n$*

$$\chi_G(F) = (-1)^{|F \cap G|}.$$

BEWEIS. Zunächst zeigen wir, dass χ_G ein Gruppenhomomorphismus ist:

$$\chi_G(F_1 + F_2) = (-1)^{|(F_1 + F_2) \cap G|} = (-1)^{|F_1 \cap G|} (-1)^{|F_2 \cap G|} = \chi_G(F_1) \chi_G(F_2),$$

wobei die zweite Gleichung wegen

$$\begin{aligned} |(F_1 + F_2) \cap G| &= |(F_1 \Delta F_2) \cap G| \\ &= |((F_1 \setminus F_2) \cup (F_2 \setminus F_1)) \cap G| \\ &= |F_1 \setminus F_2 \cap G| + |F_2 \setminus F_1 \cap G| \\ &= |F_1 \cap G| + |F_2 \cap G| - 2|F_1 \cap F_2 \cap G| \\ &= |F_1 \cap G| + |F_2 \cap G| \pmod{2} \end{aligned}$$

gilt. Nun zeigen wir noch die Orthogonalitätsrelation: Es sei $G_1 \neq G_2$. Dann hat man

$$\begin{aligned} \langle \chi_{G_1}, \chi_{G_2} \rangle &= \frac{1}{|E|} \sum_{F \subseteq K_n} (-1)^{|G_1 \cap F|} (-1)^{|G_2 \cap F|} \\ &= \frac{1}{|E|} \sum_{F \subseteq K_n} (-1)^{|G_1 + G_2 \cap F|} \\ &= 0, \end{aligned}$$

da $G_1 + G_2 \neq 0$ gilt und $\chi_{G_1 + G_2}$ ein Gruppenhomomorphismus ist. □

LEMMA 2.10. *Es sei $w \in \mathbb{R}^E$ mit $\text{supp } w \subseteq \mathcal{B}'$. Dann gilt*

$$\widehat{w}(\chi_G) = (-1)^{|G|} \frac{1}{|E|} \sum_{F \in \mathcal{B}'} w(\overline{F}) (-1)^{|F \cap G|},$$

wobei

$$\mathcal{B} = \{B : B \subseteq K_n \text{ bipartit}\}.$$

BEWEIS. Es gilt:

$$\begin{aligned} \widehat{w}(\chi_G) &= \langle w, \overline{\chi}_G \rangle = \langle w, \chi_G \rangle \\ &= \frac{1}{|E|} \sum_{F \in \mathcal{B}'} w(F) (-1)^{|F \cap G|} \\ &= \frac{1}{|E|} \sum_{F \in \mathcal{B}} w(\overline{F}) (-1)^{|\overline{F} \cap G|}. \end{aligned}$$

Außerdem hat man

$$(-1)^{|G|} = (-1)^{|F \cap G \cup \overline{F} \cap G|} = (-1)^{|F \cap G|} (-1)^{|\overline{F} \cap G|}.$$

Also insgesamt:

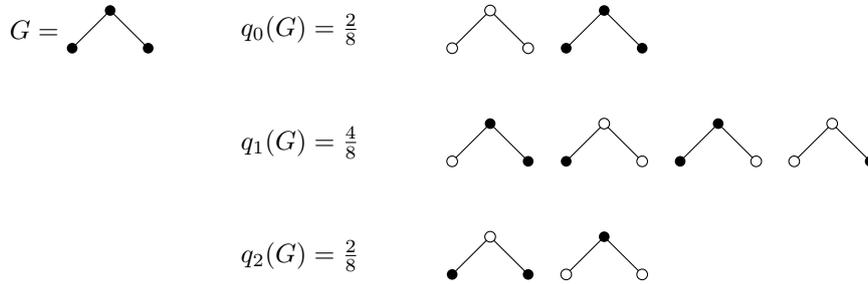
$$\widehat{w}(\chi_G) = \frac{1}{|E|} \sum_{F \in \mathcal{B}} w(\overline{F}) (-1)^{|G \cap F|} (-1)^{|F \cap G|}.$$

□

DEFINITION 2.11. *Es sei (V_1, V_2) eine zufällige Bipartition der Knoten von K_n , wobei jeder Knoten mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zu V_1 (bzw. zu V_2) gehört. Es sei $B \subseteq E$ die Menge der Kanten zwischen V_1 und V_2 . Für einen Graphen $G \subseteq E$ definiere*

$$q_i(G) = \Pr [|G \cap B| = i].$$

BEISPIEL 2.12. *Betrachte den folgenden Graphen, wo die verschiedenen Möglichkeiten der Zugehörigkeit der Knoten zu V_1 oder V_2 durch weiße und schwarze Punkte dargestellt sind:*



LEMMA 2.13. *Es gibt ein $w \in \mathbb{R}^E$ mit $\text{supp } w \subseteq \mathcal{B}'$, so dass gilt:*

$$\widehat{w}(\chi_G) = (-1)^{|G|} q_i(G).$$

BEWEIS. Das Lemma folgt aus Lemma 2.10, weil

$$G \mapsto (-1)^{|F \cap G|}, \quad F \in \mathcal{B},$$

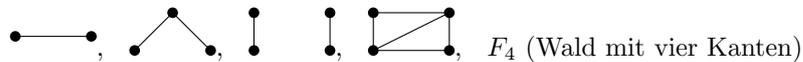
die Funktionen erzeugen, deren Urbild die Menge der bipartiten Graphen ist. □

BEWEIS VON SATZ 2.4. Wähle gemäß Lemma 2.13 ein $w \in \mathbb{R}^E$ mit $\text{supp } w \subseteq \mathcal{B}'$ und

$$\widehat{w}(\chi_G) = (-1)^{|G|} \left(q_0(G) - \frac{5}{7} q_1(G) - \frac{1}{7} q_2(G) + \frac{3}{28} q_3(G) \right).$$

Überprüfe, dass gilt

- $\widehat{w}(\chi_\emptyset) = 1$,
- $\widehat{w}(\chi_G) = -\frac{1}{7}$ falls G einer der folgenden Graphen ist:



- $\widehat{w}(\chi_G) \geq -\frac{1}{7}$ für alle anderen Teilgraphen $G \subseteq K_n$.

Dann liefert Korollar 2.7 b) die Abschätzung

$$\alpha(\text{Cayley}(\mathbb{F}_2^E, \mathcal{B}')) \leq \frac{-2 \binom{n}{2} (-\frac{1}{7})}{1 - (-\frac{1}{7})} = \frac{1}{8} 2 \binom{n}{2},$$

und die Behauptung von Satz 2.4 folgt. □

Es ergeben sich hierbei folgende Fragen:

- 1) Wie kommt man auf

$$\widehat{w}(\chi_G) = (-1)^{|G|} \left(q_0(G) - \frac{5}{7} q_1(G) - \frac{1}{7} q_2(G) + \frac{3}{28} q_3(G) \right)?$$

2) Wie überprüft man $\widehat{w}(\chi_G) \geq -\frac{1}{7}$?

Zur ersten Frage betrachte den Ansatz

$$\widehat{w}(\chi_G) = (-1)^G (c_0 q_0(G) + c_1 q_1(G) + c_2 q_2(G) + c_3 q_3(G) + c_4 q_4(G))$$

und eine Schnittstatistik von kleinen Teilgraphen:

G	$q_0(G)$	$q_1(G)$	$q_2(G)$	$q_3(G)$	$q_4(G)$
\emptyset	1	0	0	0	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0
	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	0	0
F_4	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$
	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

(Die Schnittstatistik ist für alle Wälder mit 4 Kanten die gleiche.)

Aus dieser Schnittstatistik lassen sich nun die Koeffizienten erschließen:

- Wegen $\widehat{w}(\chi_\emptyset) = 1$ gilt $c_0 = 1$.
- Wegen Aufgabe 2.1 gilt $\widehat{w}(\chi_G) = -\frac{1}{7}$ für alle echte Teilgraphen $G \subseteq K_3$.
- Wegen $\widehat{w}(\chi_{\leftarrow}) = (-1)(\frac{1}{2} + c_1 \frac{1}{2}) = -\frac{1}{7}$ hat man $c_1 = -\frac{5}{7}$.
- Wegen $\widehat{w}(\chi_{\wedge}) = \frac{1}{4} - \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{2} + c_2 \frac{1}{4} = -\frac{1}{7}$ hat man $c_2 = -\frac{1}{7}$.
- Es ist $\widehat{w}(\chi_{F_4}) \geq -\frac{1}{7}$, also

$$4c_3 + c_4 \geq \frac{3}{7}.$$

- Glücklicherweise muss aber wegen $\widehat{w}(\chi_{\rightleftarrows}) \geq -\frac{1}{7}$ auch gelten

$$4c_3 + c_4 \leq \frac{3}{7}.$$

- Aus den beiden vorangegangenen Erkenntnissen folgt, dass die Gleichheit

$$4c_3 + c_4 = \frac{3}{7}$$

erfüllt sein muss. Setze $c_3 = \frac{3}{28}$ und $c_4 = 0$.

Zur zweiten Frage kann man sich zunächst klar machen, dass

$$q_k(G) \rightarrow 0, \text{ falls } |G| \rightarrow \infty$$

gilt, so dass es genügt, die Aussage nur für eine gewisse endliche Familie von kleinen Graphen zu überprüfen.

Besonders elegant kann man nun die Strukturtheorie von Graphen verwenden, um die *Erzeugendenfunktion*

$$Q_G(X) = \sum_{k \geq 0} q_k(G) X^k$$

zu kontrollieren. Wir erklären hier, was die Idee dabei ist, die dazugehörigen Abschätzungen findet man in der Originalarbeit [1].

DEFINITION 2.14. *Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph.*

- a) *Ein Knoten $v \in V$ heißt Schnittknoten, falls $G \setminus v$ unzusammenhängend ist.*

Beispiel: 

- b) Ein Block eines Graphen ist ein maximaler zusammenhängender Teilgraph, der keinen Schnittknoten enthält.
- c) Eine Brücke von G ist ein Block der Form $\bullet \text{---} \bullet$.

LEMMA 2.15. Man kann einen zusammenhängenden Graphen kantendisjunkt in Blöcke zerlegen. Es gilt dann

$$Q_G(X) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}X\right)^m \prod_{K \in \mathcal{K}} Q_K(X)^{t_K},$$

wobei m die Anzahl der Brücken ist, \mathcal{K} die Isomorphieklassen der Blöcke (ohne Brücken) und t_k die Multiplizität der Klasse K .

Der Beweis hierzu ist einfach, man schaue in die Originalarbeit [1]. Es gilt beispielsweise (Abbildung 2):

$$Q_{\text{Graph}}(X) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}X\right) \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}X^2\right)^2.$$

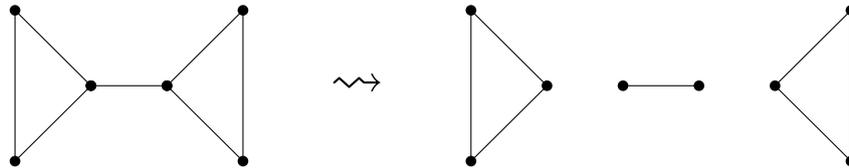


ABBILDUNG 2. Kantendisjunkte Zerlegung in Blöcke.

3. Zweite Anwendung: Arithmetische Progressionen

DEFINITION 3.1. Es sei $A \subseteq G$ eine Teilmenge einer endlichen, abelschen Gruppe $(G, +)$. Sie enthält eine arithmetische Folge (Progression) der Länge k (k -AP), falls es $a, r \in G$ gibt mit

$$a + (i - 1)r \in A \text{ für alle } i \in [k].$$

DEFINITION 3.2. Für $k \geq 1$ ist die k -te Erdős-Turán-Konstante von A definiert durch

$$r_k(A) = \max \{|B| : B \subseteq A, B \text{ enthält keine } k\text{-AP mit } r \neq 0\}.$$

Die Erdős-Turán-Konstante $r_k(A)$ ist die Unabhängigkeitszahl in dem Hypergraphen

$$H = \left(A, \{\{a + (i - 1)r : i \in [k]\} : a, r \in G, r \neq 0\}\right).$$

VERMUTUNG 1 (Erdős, Turán, 1936, [2]). Bezüglich der Erdős-Turán-Konstante lässt sich vermuten:

- a) Für alle $k \geq 3$ gilt

$$r_k([n]) = o(n),$$

wobei $[n] \subseteq \mathbb{Z}$.

- b) Es sei $A \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ gegeben mit $\sum_{a \in A} \frac{1}{a} = \infty$. Dann gilt für alle $k \geq 3$:

$$r_k(A) = o(|A|).$$

Dass aus der zweiten Vermutung die erste folgt, ist klar. Vermutung a) wurde 1975 von Szemerédi in einer spektakulären Arbeit bewiesen ([5]). Die Vermutung b) ist noch offen. Im Fall, dass A die Menge aller Primzahlen ist, wurde sie von Green und Tao im Jahr 2008 bewiesen ([3]). Auch dies ist sehr spektakulär. Hier betrachten wir den Fall $A = [n]$ und $k = 3$.

SATZ 3.3 (Roth, 1953, [3]). *Es sei $\delta > 0$ und es sei n groß genug. Es sei $A \subseteq [n]$ mit $|A| = \delta n$. Dann enthält A eine 3-AP. Insbesondere gilt $r_3([n]) = o(n)$.*

BEWEIS. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachte einfach $A \subseteq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ anstatt $A \subseteq [n]$, was wir in Übungsaufgabe 12.3 nachweisen. Betrachte die charakteristische Funktion von A ,

$$1_A: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\},$$

und benutze Fourier-Analyse. Die Charaktere von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sind nach Beispiel 1.4 b) gegeben durch

$$\chi_a(x) = e^{\frac{2\pi i a x}{n}}.$$

Wir nutzen die abgekürzte Schreibweise $\widehat{1}_A(a) = \widehat{1}_A(\chi_a)$ und erhalten

$$\widehat{1}_A(0) = \widehat{1}_A(\chi_0) = \langle 1, 1_A \rangle = \frac{1}{n}|A| = \delta,$$

und außerdem

$$\sum_{a=0}^{n-1} \left| \widehat{1}_A(a) \right|^2 = \langle 1_A, 1_A \rangle = \delta,$$

wobei bei der ersten Gleichung der Satz von Parseval-Plancherel, 1.10 b), genutzt wurde.

Die nun entscheidende Definition ist

$$E = \frac{1}{n^2} \sum_{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \sum_{r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} 1_A(x) 1_A(x+r) 1_A(x+2r),$$

die die Anzahl von 3-APs in A zählt, wobei die triviale 3-AP mit $r = 0$ sowie Multiziplicitäten von 3-APs mitgezählt wird. Falls A keine 3-AP mit $r \neq 0$ enthalten würde, wäre

$$E = \frac{\delta n}{n^2} = \frac{\delta}{n},$$

das heißt, E würde für großes n gegen 0 tendieren. Wir werden zeigen, dass jedoch

$$E > C(\delta) > 0$$

gilt, wobei $C(\delta)$ eine nur von δ abhängige Konstante ist. Hierzu wenden wir die „Hardy-Littlewood circle method“ auf E an, also substituieren wir $x' = x$, $y' = x + 2r$ und $z' = x + r$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{n^3} \sum_{x', y', z' \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} 1_A(x') 1_A(y') 1_A(z') \underbrace{\sum_{a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} e^{\frac{-2\pi i a (x' + y' - 2z')}{n}}}_{\begin{cases} 0, & \text{falls } x' + y' - 2z' \neq 0, \\ n, & \text{falls } x' + y' - 2z' = 0. \end{cases}} \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \sum_{x', y', z' \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} 1_A(x') e^{-\frac{2\pi i a x'}{n}} 1_A(y') e^{-\frac{2\pi i a y'}{n}} 1_A(z') e^{-\frac{2\pi i a (-2z')}{n}} \\ &= \sum_{a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \widehat{1}_A(a)^2 \widehat{1}_A(-2a) \\ &= \underbrace{\widehat{1}_A(0)^3}_{I_1} + \underbrace{\sum_{a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus 0} \widehat{1}_A(a)^2 \widehat{1}_A(-2a)}_{I_2}. \end{aligned}$$

Es ist $I_1 = \delta^3$. Bei der Berechnung von I_2 ergeben sich zwei Fälle:

1. Der „zufällige“ Fall:

$$|\widehat{1}_A(a)| \leq \frac{\delta^2}{2} \quad \text{für alle } a \neq 0.$$

Dann hat man

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \sum_{a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \{0\}} \widehat{1}_A(a)^2 \widehat{1}_A(-2a) \right| \\ &\leq \sum_{a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \{0\}} \widehat{1}_A(a)^2 \frac{\delta^2}{2} \\ &= \left(\langle 1_A, 1_A \rangle - |\widehat{1}_A(0)|^2 \right) \cdot \frac{\delta^2}{2} \\ &= (\delta - \delta^2) \frac{\delta^2}{2} \\ &\leq \frac{\delta^3}{2}, \end{aligned}$$

wobei bei der zweiten Gleichung wieder Parseval-Plancherel, 1.10 b), verwendet wurde. Entsprechend folgt:

$$E = I_1 + I_2 \geq \delta^3 - \frac{\delta^3}{2} = \frac{\delta^3}{2}.$$

2.) Der „strukturierte Fall“: Es gibt ein $a \neq 0$, so dass

$$|\widehat{1}_A(a)| > \frac{\delta^2}{2}.$$

Es sei ohne Einschränkung n eine Primzahl (wir werden später sehen, wieso das kein Problem ist). Partitioniere den Torus in M aufeinanderfolgende Intervalle I_1, \dots, I_M mit Durchmesser so nah wie möglich an $\frac{\delta^4}{2}$. Definiere

$$P_j = \left\{ x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : e^{\frac{2\pi i(-a)x}{n}} \in I_j \right\}.$$

Für ein Beispiel betrachte Abbildung 3

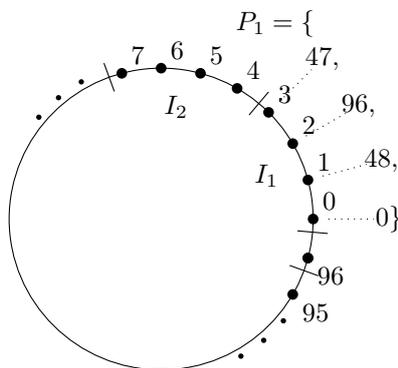


ABBILDUNG 3. Ein Beispiel für P_j mit $n = 97$, $a = -2$, und $\delta = 0.4$. Es ist $\frac{\delta^2}{4} = 0.04$ und $\lceil 97 \cdot 0.04 \rceil = 4$. P_j ist eine AP mit $r = 48$.

Generell ist P_j eine AP mit Schrittweite $-\frac{1}{a}$ (in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, wobei hier verwendet wird, dass n eine Primzahl ist). Definiere eine Funktion f durch

$f(x) = 1_A(x) - \delta$. Dann gilt $\widehat{f}(0) = 0$ und $\widehat{f}(a) = \widehat{1}_A(a)$ für alle $a \neq 0$. Also folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2}{2} &< \left| \widehat{f}(a) \right| = |\langle f, \chi_{-a} \rangle| \\ &= \left| \frac{1}{n} \sum_{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} f(x) \chi_{-a}(x) \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^M \sum_{x \in P_j} f(x) \chi_{-a}(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^M \left| \sum_{x \in P_j} f(x) \chi_{-a}(x) \right|. \end{aligned}$$

Für festes j wähle $x_j \in P_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{x \in P_j} f(x) \chi_{-a}(x) \right| &\leq \left| \sum_{x \in P_j} f(x) \chi_{-a}(x_j) \right| + \left| \sum_{x \in P_j} f(x) (\chi_{-a}(x) - \chi_{-a}(x_j)) \right| \\ &\leq \left| \sum_{x \in P_j} f(x) \right| + \underbrace{\sum_{x \in P_j} \frac{\delta^2}{4}}_{\frac{\delta^2}{4} |P_j|}. \end{aligned}$$

Über j aufsummiert hat man

$$\frac{\delta^2}{2} < \frac{1}{n} \sum_{j=1}^M \left(\left| \sum_{x \in P_j} f(x) \right| + \frac{\delta^2}{4} |P_j| \right) = \frac{\delta^2}{4} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^M \left| \sum_{x \in P_j} f(x) \right|,$$

und daher

$$\frac{\delta^2}{4} < \frac{1}{n} \sum_{j=1}^M \left| \sum_{x \in P_j} f(x) \right|.$$

Weil $\sum_{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} f(x) = 0$ ist, gilt auch

$$\frac{\delta^2}{4} < \frac{1}{n} \sum_{j=1}^M \left(\left| \sum_{x \in P_j} f(x) \right| + \sum_{x \in P_j} f(x) \right),$$

das heißt, es gibt ein $j \in [M]$ mit

$$\sum_{x \in P_j} f(x) \geq \frac{\delta^2}{8} |P_j|.$$

Damit folgt

$$|A \cap P_j| = \sum_{x \in P_j} (\delta + f(x)) \geq \delta \left(1 + \frac{\delta}{8} \right) |P_j|.$$

Das bedeutet, die Menge A hat in der (langen) arithmetischen Progression P_j eine größere Dichte als in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Jetzt kann man das Argument für die Menge $A \cap P_j$ in P_j wiederholen. In jedem Schritt wird die Dichte der betrachteten Menge um einen Faktor von $\frac{\delta}{8}$ vergrößert. Nach k Schritten, mit $\left(1 + \frac{\delta}{8} \right)^k \geq 1$, hat man eine 3-AP sicher gestellt.

□

Es gibt ein Problem mit den Einschränkungen im Beweis: Wenn man induktiv von n auf P_j schließt, ist n im Allgemeinen keine Primzahl mehr. Um dieses Problem zu umgehen, konstruieren wir die AP mit Hilfe diophantischer Approximation:

LEMMA 3.4 (Dirichlet, 1842). *Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in (0, 1)$. Dann gibt es $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $1 \leq q \leq \frac{1}{\varepsilon}$ und $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{\varepsilon}{q}$.*

BEWEIS. Es sei $M = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$. Betrachte die Zahlen

$$\{0\alpha\}, \{1\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{M\alpha\},$$

wobei $\{\beta\} = \beta - \lfloor \beta \rfloor$ der fraktionale Teil einer Zahl β ist. Da $0 \leq \{i\alpha\} < 1$ ist, gibt es zwei verschiedene Zahlen $i, j \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq i, j \leq M$ und $\{(i-j)\alpha\} \leq \frac{1}{M+1}$. Definiere $q = i - j$ und $p = \lfloor q\alpha \rfloor$. Dann ist

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{\alpha q}{q} - \frac{\lfloor q\alpha \rfloor}{q} \right| = \left| \frac{\{(i-j)\alpha\}}{q} \right| \leq \frac{1}{(M+1)|q|} < \frac{\varepsilon}{|q|}$$

und $|q| \leq M \leq \frac{1}{\varepsilon}$, wie gewünscht. □

Noch einmal zurück zum „strukturierten“ Fall 2, also es gibt ein $a \neq 0$ mit

$$|\widehat{1}_A(a)| > \frac{\delta^2}{2}.$$

Für ein später zu wählendes ε finde nach Lemma 3.4 p und q mit

$$\left| \frac{a}{n} - \frac{p}{q} \right| < \frac{\varepsilon}{q}.$$

Partitioniere $[n]$ in AP mod q . Es gibt q solcher AP und ungefähr $\frac{n}{q}$ -vielen Elementen. Für ein später zu wählendes M partitioniere jede der AP in M Intervalle. Jedes Intervall enthält ungefähr $\frac{n}{qM}$ -viele Elemente. Es sei I ein solches Intervall. Betrachte ein $x \in I$. Dann gilt

$$\begin{aligned} e^{\frac{2\pi i(-a)x}{n}} &= e^{-2\pi i\left(\frac{p}{q}-\theta\right)x} \quad \text{mit } |\theta| < \frac{\varepsilon}{q} \\ &= \underbrace{e^{-2\pi i\frac{p}{q}x}}_{\text{konstant auf } I} \cdot \underbrace{e^{-2\pi i\theta x}}_{\text{Variation auf } I}. \\ &\approx |\theta| \frac{n}{M} \leq \frac{\varepsilon n}{qM}. \end{aligned}$$

Wähle nun z und M , so dass

$$\frac{\varepsilon n}{qM} = \frac{\delta^2}{4} \quad \text{und} \quad \frac{n}{qM} \approx \sqrt{n},$$

beispielsweise $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}}$ und $M = \frac{1}{q}\sqrt{n}\frac{4}{\delta^2}$.

Literatur zu Kapitel 4

- [1] D. Ellis, Y. Filmus, E. Friedgut, *Triangle-intersecting families of graphs*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **14** (2012), 841–885.
- [2] P. Erdős, P. Turán, *On some sequences of integers*, Journal of the London Mathematical Society **11** (1936), 261–264.
- [3] B. Green, T. Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, Annals of Mathematics **167** (2008), 481–547.
- [4] K.F. Roth, *On certain sets of integers*, Journal of the London Mathematical Society **28** (1953), 104–109.
- [5] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974), Vol. **2** (1975), 503–505.

Regularität

1. Einführung in die extreme Graphentheorie

Es sei ein Graph H gegeben. Die Fragestellung in diesem Abschnitt lautet:
Wie viele Kanten muss ein Graph auf n Knoten wenigstens haben, um die Existenz eines Teilgraphen, der zu H isomorph ist, sicherzustellen?

DEFINITION 1.1. *Es sei H ein Graph. Wir definieren die Funktion*

$$\text{ex}(n, H) := \max \{ |E| : G = (V, E) \text{ mit } |V| = n \text{ und } H \not\subseteq G \},$$

wobei $H \not\subseteq G$ meint, dass H nicht in G enthalten ist.

Beispielsweise gilt $\text{ex}(4, K_3) = 4$. Nun stellt sich die Frage, ob man eine Aussage über die Graphen tätigen kann, die $\text{ex}(n, H)$ realisieren. Zunächst betrachten wir nun Aussagen über vollständige Graphen.

1.1. Vollständige Graphen $H = K_p$.

BEISPIEL 1.2. *Betrachte $n = 6$ und $H = K_3$, dann gilt*

$$\text{ex}(6, K_3) = 9.$$

Betrachte $n = 6$ und $H = K_4$, dann gilt

$$\text{ex}(6, K_4) = 12.$$

Dies kann man sich graphisch überlegen durch eine Aufteilung der 6 Knoten in eine Bipartition bzw. Tripartition (Abbildung 1).

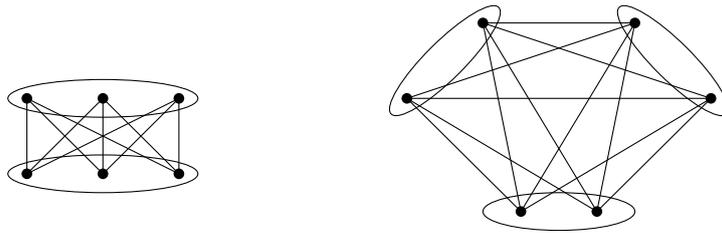


ABBILDUNG 1. Optimale Graphen für $\text{ex}(6, K_3)$ und $\text{ex}(6, K_4)$.

Diese Beobachtung möchten wir verallgemeinern:

DEFINITION 1.3. *Definiere den vollständigen $(p-1)$ -partiten Graphen $K_{n_1, n_2, \dots, n_{p-1}} = (V, E)$ durch*

$$V = \bigcup_{i=1}^{p-1} V_i \quad \text{mit } |V_i| = n_i$$

$$E = \{ \{v, w\} : v \in V_i, w \in V_j, i \neq j \},$$

wobei die Mengen V_i paarweise disjunkt sind.

Der Graph $K_{n_1, n_2, \dots, n_{p-1}}$ hat $\sum_{1 \leq i < j \leq p-1} n_i n_j$ -viele Kanten.

LEMMA 1.4.

- a) $K_{n_1, n_2, \dots, n_{p-1}}$ enthält keinen K_p .
- b) Unter allen vollständigen $(p-1)$ -partiten Graphen enthalten genau die Graphen $K_{n_1, n_2, \dots, n_{p-1}}$ mit $|n_i - n_j| \leq 1$ für alle i und j die meisten Kanten.

Graphen der Form in b) heißen *Turán-Graphen*, die Anzahl ihrer Kanten bezeichnet man mit $t_{p-1}(n)$ und es ergibt sich

$$t_{p-1}(n) = \sum_{0 \leq i < j < p-1} \left\lfloor \frac{n+i}{p-1} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+j}{p-1} \right\rfloor.$$

BEWEIS. Zu a): Die Aussage ist klar, denn die chromatische Zahl lautet

$$\chi(K_{n_1, n_2, \dots, n_{p-1}}) = p-1,$$

während $\chi(K_p) = p$ gilt.

Zu b): Angenommen $n_1 \geq n_2 + 2$, der Graph sei also kein Turán-Graph. Dann berechne die Anzahl I_1 der Kanten von $K_{n_1-1, n_2+1, n_3, \dots, n_{p-1}}$ abzüglich der Anzahl I_2 der Kanten von $K_{n_1, n_2, \dots, n_{p-1}}$. Es gilt

$$I_1 - I_2 = (n_1 - 1)(n_2 + 1) - n_1 n_2 = n_1 - n_2 - 1 \geq 1.$$

□

SATZ 1.5 (Turán, 1941, [6]). *Es ist*

$$\text{ex}(n, K_p) = t_{p-1}(n)$$

und es gilt Gleichheit genau dann, wenn G ein Turán-Graph ist.

(Falls n durch $p-1$ teilbar ist, ist $t_{p-1}(n) = \binom{p-1}{2} \left(\frac{n}{p-1}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{n^2}{2}$.)

BEWEIS. Es sei G ein Graph mit n Knoten und maximaler Kantenanzahl ohne K_p . Wir werden jetzt zeigen, dass G ein vollständiger $(p-1)$ -partiter Graph ist. Wir behaupten, dass für alle $u, v, w \in V$ gilt: Ist $\{u, v\} \notin E$ und $\{u, w\} \notin E$, so ist $\{v, w\} \notin E$.

Angenommen, das stimmt nicht, es gelte also $\{v, w\} \in E$.

Fall 1: $\deg(u) \geq \deg(v), \deg(w)$, wobei der Grad \deg eines Knoten die Anzahl seiner Nachbarn ist. Konstruiere einen neuen Graphen G' durch zweifaches Verdoppeln von u (Abbildung 2) und Löschen von v, w . Dann hat G' keinen K_p und es gilt im Widerspruch zur Wahl von G :

$$|E(G')| = |E(G)| + 2 \deg(u) - \deg(v) - \deg(w) + 1 > |E(G)|$$

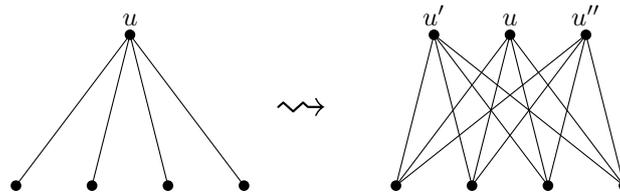


ABBILDUNG 2. Zweifaches Verdoppeln von u .

Fall 2: Ohne Einschränkung sei $\deg(u) < \deg(v)$. Konstruiere G' durch Verdoppeln von v und Löschen von u , dann gilt wiederum:

$$|E(G')| = |E(G)| + \deg(v) - \deg(u) > |E(G)|$$

Damit haben wir die obige Behauptung nachgewiesen. Dies begründet, dass die Relation

$$u \sim v \iff \{u, v\} \notin E$$

eine Äquivalenzrelation ist. Also ist G ein vollständiger $(p-1)$ -partiter Graph. Nach Lemma 1.4 b) ist G ein Turán-Graph. □

1.2. Allgemeine Graphen H . Für allgemeine Graphen H ist ein approximatives Resultat bekannt:

SATZ 1.6 (Erdős, Stone, Simonovits, 1946, 1966, [1, 2]). *Es sei H ein Graph und es sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein n_0 , so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:*

$$\left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} - \varepsilon\right) \frac{n^2}{2} \leq \text{ex}(n, H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2}.$$

Falls $H = K_p$ gilt, ist dies eine approximative Variante von Satz 1.5. Falls H bipartit ist, dann ist $\chi(H) = 2$ und $\text{ex}(n, H) \leq \varepsilon n^2$ für alle ε und genügend großes n .

Den Beweis von Satz 1.6 kann man mit Hilfe des Regularitätslemma von Szemerédi vollziehen.

2. Das Regularitätslemma von Szemerédi

DEFINITION 2.1. *Es sei $G = (V, E)$ Graph und $A, B \subseteq V$. Dann ist die Menge der Kanten zwischen A und B definiert als*

$$E(A, B) = \{\{a, b\} \in E : a \in A, b \in B\}$$

und die Dichte der Kanten zwischen A und B als

$$d(A, B) = \frac{|E(A, B)|}{|A| \cdot |B|}.$$

DEFINITION 2.2.

- a) *Das Paar (A, B) mit $A, B \subseteq V$ heißt ε -regulär, falls für alle $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$ mit $|A'| \geq \varepsilon|A|$ und $|B'| \geq \varepsilon|B|$ gilt:*

$$|d(A', B') - d(A, B)| \leq \varepsilon.$$

- b) *Eine Partition $V = \bigcup_{i \in [k]} X_i$ heißt ε -regulär, falls*

$$\sum_{(X_i, X_j) \text{ nicht } \varepsilon\text{-regulär}} \frac{|X_i||X_j|}{n^2} \leq \varepsilon.$$

SATZ 2.3 (Regularitätslemma von Szemerédi, 1978, [5]). *Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein M , so dass jeder Graph G eine ε -reguläre Partition besitzt, die aus maximal M Klassen besteht.*

BEMERKUNG.

- 1) Das Regularitätslemma ist ein sehr wichtiges Hilfsmittel in der extremalen Graphentheorie.
- 2) Wir werden das Regularitätslemma verwenden, um das Theorem von Roth über 3-APs und das Theorem von Erdős, Stone, Simonovits zu beweisen.
- 3) Im folgenden werden wir uns in der Darstellung an die Lecture Notes "Extremal graph theory" von David Conlon anlehnen.

Beweis des Regularitätslemma.

DEFINITION 2.4. Die quadratische mittlere Dichte einer Partition $V = \dot{\bigcup}_{i \in [k]} X_i$ ist definiert durch

$$\sum_{1 \leq i, j \leq k} \frac{|X_i||X_j|}{n^2} d(X_i, X_j)^2.$$

Die quadratische mittlere Dichte liegt immer zwischen 0 und 1, denn es ist

$$\sum_{1 \leq i, j \leq k} \frac{|X_i||X_j|}{n^2} = 1 \quad \text{und} \quad d(X_i, X_j) \in [0, 1].$$

LEMMA 2.5. Es sei $V = \dot{\bigcup}_{i \in [k]} X_i$ eine Partition und $V = \dot{\bigcup}_{j \in [l]} Y_j$ eine Verfeinerung. Dann ist die quadratische mittlere Dichte der Partition in die Y_j mindestens so groß wie die quadratische mittlere Dichte der Partition in die X_i .

BEWEIS. Schreibe $X_i = X_{i,1} \cup \dots \cup X_{i,a_i}$, wobei $X_{i,b_i} = Y_j$ für ein j . Es gilt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned} d(X_i, X_j)^2 &= \left(\sum_{s,t} \frac{|X_{i,s}||X_{j,t}|}{|X_i||X_j|} d(X_{i,s}, X_{j,t}) \right)^2 \\ &= \left(\sum_{s,t} \sqrt{\frac{|X_{i,s}||X_{j,t}|}{|X_i||X_j|}} \sqrt{\frac{|X_{i,s}||X_{j,t}|}{|X_i||X_j|}} d(X_{i,s}, X_{j,t}) \right)^2 \\ &\leq \underbrace{\left(\sum_{s,t} \frac{|X_{i,s}||X_{j,t}|}{|X_i||X_j|} \right)}_{=1} \left(\sum_{s,t} \frac{|X_{i,s}||X_{j,t}|}{|X_i||X_j|} d(X_{i,s}, X_{j,t})^2 \right). \end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{|X_i||X_j|}{n^2} d(X_i, X_j)^2 \leq \sum_{s,t} \frac{|X_{i,s}||X_{j,t}|}{n^2} d(X_{i,s}, X_{j,t})^2.$$

□

LEMMA 2.6. Es sei $G = (V, E)$ mit $V = X \dot{\cup} Y$ ein bipartiter Graph. Es seien $X = \dot{\bigcup}_{i=1}^k X_i$ und $Y = \dot{\bigcup}_{j=1}^l Y_j$ Partitionen und $\dot{\bigcup}_i Z_i, \dot{\bigcup}_j W_j$ jeweilige Verfeinerungen davon. Dann gilt

$$\sum_{i,j} \frac{|X_i||Y_j|}{n^2} d(X_i, Y_j)^2 \leq \sum_{i,j} \frac{|Z_i||W_j|}{n^2} d(Z_i, W_j)^2.$$

Dies zeigt man wie Lemma 2.5.

LEMMA 2.7. Es seien $X, Y \subseteq V$ und $d(X, Y) = \alpha$. Angenommen (X, Y) ist nicht ε -regulär. Dann gibt es Partitionen $X = X_1 \cup X_2$ und $Y = Y_1 \cup Y_2$ mit

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{|X_i||X_j|}{|X||Y|} d(X_i, X_j)^2 \geq \alpha^2 + \varepsilon^4.$$

BEWEIS. Da (X, Y) nicht ε -regulär ist, gibt es $X_1 \subseteq X$ und $Y_1 \subseteq Y$ mit $|X_1| \geq \varepsilon|X|$, $|Y_1| \geq \varepsilon|Y|$ und $|d(X_1, Y_1) - \alpha| > \varepsilon$. Setze $X_2 = X \setminus X_1$ und $Y_2 = Y \setminus Y_1$

und $u(X_i, Y_j) = d(X_i, Y_j) - \alpha$. Dann ist

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 &\leq \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{|X_i||Y_j|}{|X||Y|} u(X_i, Y_j)^2 \\ &= \sum_{i, j} \frac{|X_i||Y_j|}{|X||Y|} d(X_i, Y_j)^2 - 2\alpha \underbrace{\sum_{i, j} \frac{|X_i||Y_j|}{|X||Y|} d(X_i, Y_j)}_{=d(X, Y)=\alpha} + \alpha^2 \underbrace{\sum_{i, j} \frac{|X_i||Y_j|}{|X||Y|}}_{=1} \\ &= \sum_{i, j} \frac{|X_i||Y_j|}{|X||Y|} d(X_i, Y_j)^2 - \alpha^2. \end{aligned}$$

□

LEMMA 2.8. *Es sei $V = \dot{\bigcup}_{i \in [k]} X_i$ eine Partition von G , die nicht ε -regulär ist. Dann gibt es eine Verfeinerung $X_i = \dot{\bigcup}_{l \in [a_i]} X_{i,l}$, $i \in [k]$, so dass für jedes i gilt $a_i \leq 2^{2k}$ und die quadratische mittlere Dichte der neuen Partition wenigstens ε^5 größer als die der alten Partition ist.*

BEWEIS. Es sei

$$I = \{(i, j) : (X_i, X_j) \text{ ist nicht } \varepsilon\text{-regulär}\}$$

Es sei α^2 die quadratische mittlere Dichte der Partition $\dot{\bigcup}_{i \in [k]} X_i$. Wende auf jedes Element $(i, j) \in I$ Lemma 2.6 an. Das gibt die Partition

$$X_i = A_1^{i,j} \cup A_2^{i,j}, \quad X_j = B_1^{i,j} \cup B_2^{i,j},$$

mit

$$\sum_{1 \leq p, q \leq 2} \frac{|A_p^{i,j}||B_q^{i,j}|}{|X_i||X_j|} d(A_p^{i,j}, B_q^{i,j})^2 \geq d(X_i, X_j)^2 + \varepsilon^4.$$

Für jedes $i \in [k]$ betrachte die Partition $X_i = \dot{\bigcup}_{l \in [a_i]} X_{i,l}$, die man durch gemeinsames Verfeinern all dieser Partitionen bekommt. Hierfür gilt: $a_i \leq 2^{2k}$. Nach Lemma 2.5 ist

$$\sum_{p=1}^{a_i} \sum_{q=1}^{a_j} \frac{|X_{i_p}||X_{j_q}|}{|X_i||X_j|} d(X_{i_p}, X_{j_q})^2 \geq d(X_i, X_j)^2 + \varepsilon^4.$$

Multiplikation beider Seiten mit $\frac{|X_i||X_j|}{n^2}$ und Summation über alle (i, j) liefert

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leq i, j \leq k} \sum_p \sum_q \frac{|X_{i_p}||X_{j_q}|}{n^2} d(X_{i_p}, X_{j_q})^2 \\ &\geq \sum_{1 \leq i, j \leq k} \frac{|X_i||X_j|}{n^2} d(X_i, X_j)^2 + \varepsilon^4 \underbrace{\sum_{(i,j) \in I} \frac{|X_i||X_j|}{n^2}}_{\geq \varepsilon} \geq \alpha^2 + \varepsilon^5. \end{aligned}$$

□

Nun können wir das Regularitätslemma beweisen:

BEWEIS VON SATZ 2.3. Starte mit der trivialen Partition in eine Menge, $V = X_1$. Falls X_1 ε -regulär ist, sind wir fertig. Ansonsten wende Lemma 2.8 an. Dies liefert eine Partition bestehend aus höchstens vier Mengen

$$X_1 = X_{1_1} \cup X_{1_2} \cup X_{1_3} \cup X_{1_4},$$

wobei die quadratische mittlere Dichte um mindestens ε^5 gestiegen ist. Dies führen wir iterativ weiter. In der i -ten Iteration haben wir eine Partition in k Klassen. Falls diese nicht ε -regulär ist, liefert Lemma 2.8 eine neue Partition mit höchstens $k \cdot 2^{2k} \leq$

2^{2^k} Klassen. Da die quadratische mittlere Dichte in jedem Schritt um ε^5 steigt und die quadratische mittlere Dichte insgesamt durch 1 nach oben beschränkt ist, sind wir nach höchstens $\leq \varepsilon^{-5}$ Schritten fertig und haben eine ε -reguläre Partition konstruiert. \square

3. Erste Anwendung: Der Satz von Roth über 3-AP

LEMMA 3.1 (triangle counting lemma). *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $X, Y, Z \subseteq V$ mit $(X, Y), (Y, Z), (Z, X)$ sind ε -regulär, wobei*

$$d(X, Y) = \alpha, \quad d(Y, Z) = \beta, \quad d(Z, X) = \gamma.$$

Falls $\alpha, \beta, \gamma \geq 2\varepsilon$ gilt, dann ist die Anzahl der Dreiecke xyz mit $x \in X, y \in Y, z \in Z$ mindestens

$$(1 - 2\varepsilon)(\alpha - \varepsilon)(\beta - \varepsilon)(\gamma - \varepsilon)|X||Y||Z|.$$

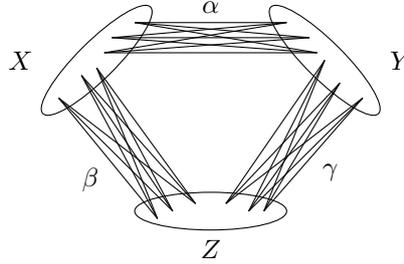


ABBILDUNG 3. Illustrierung der Ausgangssituation in Lemma 3.1.

BEWEIS. Es sei $x \in X$ und sei $d_Y(x)$ definiert als die Anzahl der Nachbarn von x in Y , analog $d_Z(x)$. Die Anzahl der $x \in X$ mit $d_Y(x) < (\alpha - \varepsilon)|Y|$ ist höchstens $\varepsilon|X|$. Denn angenommen, dies wäre nicht so, dann gibt es eine Teilmenge $X' \subseteq X$ mit der Eigenschaft $|X'| \geq \varepsilon|X|$, so dass

$$d(X', Y) = \frac{|E(X', Y)|}{|X'||Y|} < \alpha - \varepsilon.$$

Das heißt,

$$|d(X, Y) - d(X', Y)| > \varepsilon,$$

was der ε -Regularität von (X, Y) widerspricht.

Mit dem gleichen Argument erhält man, dass die Anzahl der $x \in X$ mit $d_Z(x) < (\gamma - \varepsilon)|Z|$ höchstens $\varepsilon|X|$ ist.

Es sei $x \in X$ mit $d_Y(x) \geq (\alpha - \varepsilon)|Y|$ und $d_Z(x) \geq (\beta - \varepsilon)|Z|$. Es sei Y' die Menge der Nachbarn von x in Y und Z' die Menge der Nachbarn von x in Z . Dann ist

$$|Y'| \geq \underbrace{(\alpha - \varepsilon)|Y|}_{\geq \varepsilon}, \quad |Z'| \geq \underbrace{(\beta - \varepsilon)|Z|}_{\geq \varepsilon}.$$

Also ist $d(Y', Z') \geq (\gamma - \varepsilon)$, weil das Paar (Y, Z) ε -regulär ist. Das heißt, die Anzahl der Dreiecke xyz mit der Eigenschaft $y \in Y, z \in Z$ ist wenigstens

$$(\alpha - \varepsilon)(\beta - \varepsilon)(\gamma - \varepsilon)|Y||Z|.$$

Dies über alle $x \in X$ aufsummiert (unter Ausschluss derer x , die $d_Y(x) < (\alpha - \varepsilon)|Y|$ erfüllen oder $d_Z(x) < (\gamma - \varepsilon)|Z|$, die höchstens $2\varepsilon|X|$ -viele sind) liefert

$$(1 - 2\varepsilon)(\alpha - \varepsilon)(\beta - \varepsilon)(\gamma - \varepsilon)|X||Y||Z|.$$

\square

LEMMA 3.2 (triangle removal lemma, Ruzsa, Szemerédi, 1976, [4]). *Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass es für alle Graphen G auf n Knoten, die höchstens δn^3 Dreiecke besitzen, genügt, εn^2 Kanten zu löschen, um G dreiecksfrei zu machen.*

BEWEIS. Das Regularitätslemma, Lemma 2.3, garantiert die Existenz einer $\frac{\varepsilon}{4}$ -regulären Partition $V = \dot{\bigcup}_{i \in [M]} X_i$. Lösche eine Kante $\{x, y\} \in E$, falls eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt ist:

1. $(x, y) \in X_i \times X_j$ und (X_i, X_j) ist nicht $\frac{\varepsilon}{4}$ -regulär.
2. $(x, y) \in X_i \times X_j$ und $d(X_i, X_j) < \frac{\varepsilon}{2}$.
3. $x \in X_i$ mit $|X_i| \leq \frac{\varepsilon}{4M}n$.

Mit der ersten Möglichkeit löschen wir höchstens

$$\sum_{(i,j) \in I} |X_i||X_j| \leq \frac{\varepsilon}{4}n^2$$

viele Kanten, wobei I die Menge aller nicht- $\frac{\varepsilon}{4}$ -regulären Paare ist. Mit der zweiten Möglichkeit löschen wir höchstens

$$\frac{\varepsilon}{2}n^2$$

viele Kanten und mit der dritten Möglichkeit werden höchstens

$$M \cdot n \cdot \frac{\varepsilon}{4M}n = \frac{\varepsilon}{4}n^2$$

viele Kanten gelöscht. Also haben wir insgesamt höchstens

$$\varepsilon n^2$$

viele Kanten gelöscht.

Angenommen wir haben noch immer ein Dreieck xyz mit $x \in X_i$, $y \in X_j$ und $z \in X_k$. Dann sind die Paare (X_i, X_j) , (X_i, X_k) , (X_j, X_k) $\frac{\varepsilon}{4}$ -regulär. Außerdem gilt $|X_i|, |X_j|, |X_k| \geq \frac{\varepsilon}{4M}n$. Die Dichte zwischen den Paaren ist wenigstens $\frac{\varepsilon}{2}$. Also haben wir nach Lemma 3.1 wenigstens

$$d = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^3 \left(\frac{\varepsilon}{4M}\right)^3 n^3$$

Dreiecke. Für $0 < \delta < d$ haben wir einen Widerspruch. □

Der nachfolgende Satz ist eine Verallgemeinerung des Satz von Roth über 3-AP.

SATZ 3.3. *Es sei $\delta > 0$. Dann gibt es ein n_0 , so dass für alle $n \geq n_0$ und jede Teilmenge $A \subseteq [n]^2$ mit wenigstens δn^2 vielen Elementen stets ein $d > 0$ existiert mit*

$$(x, y), (x + d, y), (x, y + d) \in A.$$

BEWEIS. Die Menge $A + A = \{x + y : x \in A, y \in A\}$ ist in $[2n]^2$ enthalten. Es gibt ein $z \in A + A$, das als $x + y$ in wenigstens

$$\frac{(\delta n^2)^2}{(2n)^2} = \frac{\delta^2 n^2}{4}$$

verschiedenen Weisen geschrieben werden kann. Definiere $A' = A \cap (z - A)$ und $\delta' = \frac{\delta^2}{4}$. Dann gilt $|A'| \geq \delta' n^2$. Falls A' ein 3-Tupel der Form $(x, y), (x + d, y), (x, y + d)$ mit $d < 0$ enthält, so auch $z - A$. Also hat auch A dann ein solches 3-Tupel, allerdings mit $d > 0$. Das heißt, es genügt nach einem 3-Tupel mit $d \neq 0$ in A zu

suchen. Betrachte den tripartiten Graphen G mit Knoten $X \cup Y \cup Z$, $X = Y = [n]$, $Z = [2n]$ und Kanten

$$\begin{aligned}x \sim y &\Leftrightarrow (x, y) \in A \\x \sim z &\Leftrightarrow (x, z - x) \in A \\y \sim z &\Leftrightarrow (z - y, y) \in A\end{aligned}$$

Falls es ein Dreieck xyz in G gibt, dann ist

$$(x, y), (x, y + (z - x - y)), (x + (z - x - y), y) \in A,$$

was ein 3-Tupel mit $d \neq 0$ ist, falls $z \neq x + y$.

Angenommen also, es gibt in G nur Dreiecke xyz mit $z = x + y$. Davon gibt es höchstens $n^2 = \frac{1}{64n}(4n)^3$ -viele. Nach Lemma 3.2 (unter der Bedingung, dass n groß genug ist) kann man durch Löschen von $\frac{\delta}{2}n^2$ -vielen Kanten den Graphen dreiecksfrei machen. Jedes Element in A bestimmt aber ein Dreieck mit $z = x + y$, wobei alle Kanten disjunkt sind. Da $|A| = \delta n^2$ ist, haben wir einen Widerspruch. \square

Wir wiederholen den Satz von Roth aus Kapitel 4 und beweisen ihn anschließend erneut.

SATZ 3.4 (Roth, 1953, [3]). *Für alle $\delta > 0$ gibt es ein n_0 , so dass für alle $n \geq n_0$ stets gilt: Sei $A \subseteq [n]$ eine Teilmenge mit wenigstens δn -Elementen. Dann enthält A eine 3-AP.*

BEWEIS. Definiere $B \subseteq [2n]^2$ durch

$$B = \{(x, y) : x - y \in A\}.$$

Dann gilt $|B| \geq \delta n^2 = \frac{\delta}{4}(2n)^2$. Nach Satz 3.3 gibt es ein $d > 0$ mit

$$(x, y), (x + d, y), (x, y + d) \in B,$$

das heißt

$$x - y, x + d - y, x - y - d \in A.$$

Setzt man $x' = x - y - d$, so hat man das gewünschte Ergebnis. \square

4. Zweite Anwendung: Der Satz von Erdős, Stone, Simonovits

Leider war in dieser Vorlesung dafür keine Zeit mehr. Wir vertagen den Beweis auf das Seminar im nächsten Semester.

Literatur zu Kapitel 5

- [1] P. Erdős, A.H. Stone, *On the structure of linear graphs*, Bulletin of the American Mathematical Society **52** (1946), 1087–1091.
- [2] P. Erdős, M. Simonovits, *A limit theorem in graph theory*, Studia Sci. Math. Hungar **1** (1966), 51–57.
- [3] K.F. Roth, *On certain sets of integers*, Journal of the London Mathematical Society **28** (1953), 104–109.
- [4] I.Z. Ruzsa, E. Szemerédi, *Triple systems with no six points carrying three triangles*, Colloq. Math. Sot. Junos Bolyai **18** (1978), 939–945.
- [5] E. Szemerédi, *Regular partitions of graphs*, Problèmes combinatoires et théorie des graphes, Colloq. Internat. CNRS **260**, Paris: CNRS, 399–401.
- [6] P. Turán, *Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie*, Mat. Fiz. Lapok **48** (1941), 436–452 (ungarisch).