Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. F. von Heymann

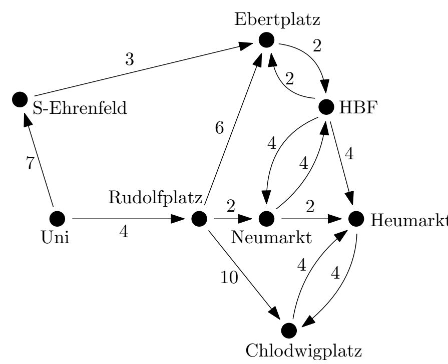
Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2015

— Aufgabenblatt 1 —

Aufgabe 1.1 Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph mit Kantenlängenfunktion $l\colon A \to \mathbb{R}$, wobei jeder Kreis in D eine nicht-negative Länge habe. Sei $P = (v_0, a_1, v_1, \ldots, v_{m-1}, a_m, v_m)$ ein kürzester Weg von v_0 nach v_m. Zeigen Sie, dass $P' = (v_0, a_1, v_1, \ldots, v_{m-1})$ ein kürzester Weg von v_0 nach v_{m-1} ist. Gilt diese Aussage auch, wenn man in D Kreise negativer Länge erlaubt?

Aufgabe 1.2 Finden Sie im rechtsstehenden gerichteten Graphen kürzeste Wege von der Uni zu jedem der anderen Knoten, sowie eine optimale Potentialfunktion. Begründen Sie, warum die von Ihnen angegebene Funktion eine optimale Potentialfunktion ist.

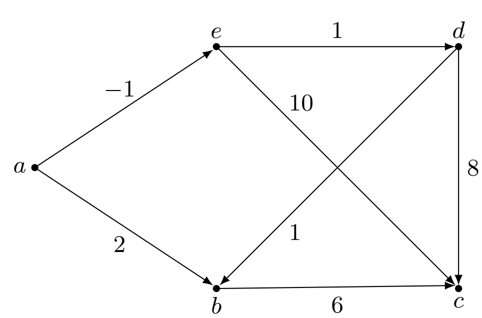


Aufgabe 1.3 Für zwei $(n \times n)$-Matrizen A und B definiere das *Min-Plus Produkt* als $A \oplus B = C$, wobei $C_{ij} = \min\{A_{ik} + B_{kj} \ : \ k = 1, \ldots, n\}$.
Sei $D = (V, A)$ ein Graph mit $|V| = n$ und Kantenlängenfunktion $l\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei W die Matrix definiert durch

$$W_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i = j \\ l(a) & \text{falls } a = (v_i, v_j) \in A \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: Das $(n-1)$-fache Min-Plus Produkt von W mit sich selbst liefert die Länge kürzester Wege in D. Anders formuliert: $W_{ij}^{\oplus(n-1)} = \text{dist}(v_i, v_j)$.

Aufgabe 1.4 (Präsenzübung) Bestimmen Sie mit Hilfe des Algorithmus von Bellman-Ford einen kürzesten Weg vom Knoten a zum Knoten c in dem rechtsstehenden Graphen.



Abgabe: Bis Dienstag, 14. April, 10:00 Uhr.
Aufgabe 1.1 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01). Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben. Aufgabe 1.2 oder 1.3 auf der Vorlesungshomepage eintragen.