Einführung in die Mathematik des Operations Research (Sommersemester 2015)

Vorlesungshomepage: http://www.mi.uni-koeln.de/veranstaltungen/or2015

→ Anmeldungen zu den Übungen (bis morgen 12 Uhr)

→ Aufgabenblätter (jeweils vier Aufgaben:
Aufgabe 1: schriftlich abgeben
A. 2 oder 3: mündlich vorbereiten
A. 4: Präsenzaufgabe)

Was ist „O.R."? Antwort nach Gesellschaft für OR e.V.:

- Entwicklung und Einsatz quantitativer Modelle und Methoden zur Entscheidungsunterstützung
- geprägt durch Zusammenarbeit von Mathematik, Wirtschaftswissenschaften, Informatik

Teil A – Graphen und Netzwerke,

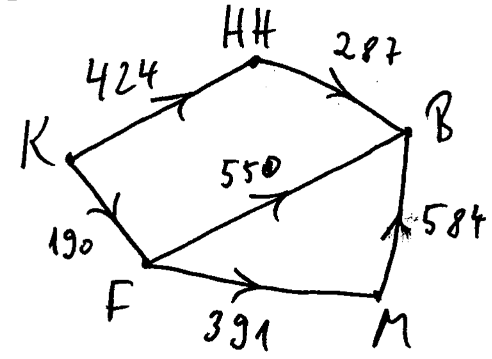
Kombinatorische Algorithmen

Sehr oft werden im OR Probleme mit Hilfe von Graphen und Netzwerken modelliert.

Hier:
- Bestimmung kürzester Wege in einem Netzwerk (Anwendung: Navigationsgeräte)
- Bestimmung maximaler Matchings in einem bipartiten Graph (Anwendung: Partnerfindung)
- Bestimmung maximaler Flüsse in einem Netzwerk (Anwendung: Transportprobleme)

Kapitel I Kürzeste Wege

Straßennetz(werk)

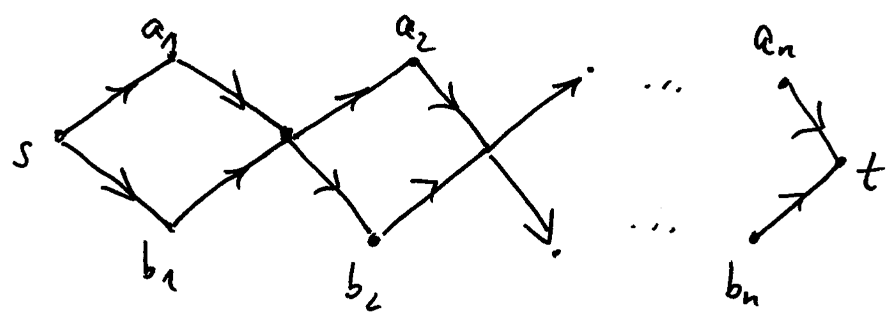


Ziel: Finde einen kürzesten Weg von K nach B

Mögliche Wege:	Länge
$\boxed{K \to HH \to B}$	711
$K \to F \to B$	740
$K \to F \to M \to B$	1165

__Eigentliches Ziel:__ Finde einen kürzesten Weg auf eine effiziente (algorithmische) Weise

__Insbesondere:__ Probiere nicht alle Möglichkeiten aus.



$2 \quad \cdot \quad 2 \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \, 2 = 2^n$ mögliche Wege

n	__Rechenzeit__ (Annahme: pro Weg 10^{-9} s)
20	0,001 s
40	18 min
60	36 Jahre
80	38 Mill. Jahre

__§ 1 Grundbegriffe__

__Def. 1__ Ein __gerichteter Graph (Netzwerk)__ $D = (V, A)$ ist ein Paar, bestehend aus einer endl. Menge V (Menge der __Knoten__) und einer Menge

$A \subseteq \{ (v,w) \in V \times V : v \neq w \}$ (Menge der (gerichteten) Kanten). M.a.W. D beschreibt eine irreflexive Relation auf $V \times V$.

Bsp. 2 Straßennetz $V = \{ K, HH, F, M, B \}$

$$A = \{ (K, HH), (K, F), (F, M), (F, B), (M, B), (HH, B) \}$$

Def. 3 a) Eine Kantenfolge P ist ein Tupel der Form

$$P = (v_0, a_0, v_1, a_2, v_2, \dots, a_m, v_m),$$

wobei $v_0, \dots, v_m \in V$, $a_0, \dots, a_m \in A$, und $a_i = (v_{i-1}, v_i)$.

v_0 heißt Startknoten, v_m heißt Endknoten.

b) Eine Kantenfolge P heißt v_0-v_m-Weg (oder kurz Weg), falls $|\{v_0, \dots, v_m\}| = m+1$.

Def. 4 a) Eine Fkt. $l : A \to \mathbb{R}$ heißt Kantenlängenfkt.

b) Die Länge der Kantenfolge P ist

$$l(P) = \sum_{i=1}^{m} l(a_i)$$

c) Für $s,t \in V$ ist der Abstand zwischen s und t definiert als

$$\operatorname{dist}(s,t) = \inf_{P \text{ ist } s\text{-}t\text{-Weg}} \ell(P).$$

d) Ist P ein s-t-Weg mit $\ell(P) = \operatorname{dist}(s,t)$, dann heißt P ein kürzester s-t-Weg.

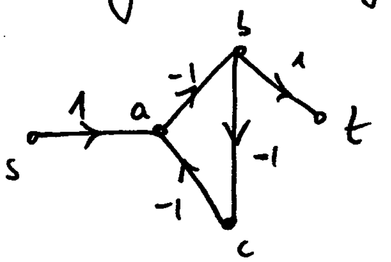
§ 2 Potentiale

Frage: Wie kann man beweisen, dass ein s-t-Weg ein kürzester s-t-Weg ist?

Hoffnung: Kürzeste s-t-Kantenfolgen sind kürzeste s-t-Wege.

Aber: Kreise negativer Länge

Bsp. 1:



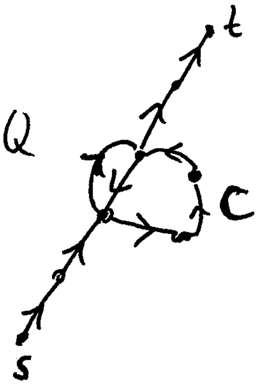
$s \to a \to b \to t$ ist kürzester s-t-Weg (Länge 1)

Aber kürzeste Kantenfolge von s nach t ex. nicht.

Def. 2 Eine Kantenfolge $P = (v_0, a_1, v_1, \dots, a_m, v_m)$ heißt (gerichteter) Kreis, falls $v_0 = v_m$ und $|\{v_0, \dots, v_m\}| = m$ ist.

Satz 3 Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph mit Längenfkt. $\ell : A \to \mathbb{R}$. Angenommen alle Kreise in D haben nichtnegative Länge. Seien $s, t \in V$, so dass es eine Kantenfolge mit Startknoten s und Endknoten t gibt. Dann gibt es eine s-t-Kantenfolge, die auch ein Weg ist.

Bew.: Klar: $\exists$ ein kürzester s-t-Weg P. Ang. $\exists$ s-t-K.f. Q mit $\ell(Q) < \ell(P)$. Wähle solches Q mit minimaler Anzahl von Kanten. Da Q kein Weg ist enthält Q einen Kreis C. Nach Voraussetzung $\ell(C) \geq 0$.



Sei Q' die Kf., die man aus Q erhält, wenn man C löscht. Dann ist Q' ebenfalls s-t-Kantenf. mit

$$\ell(Q') = \ell(Q) - \ell(C) \leq \ell(Q) < \ell(P),$$

aber mit weniger Kanten als Q. Widerspruch! $\boxtimes$