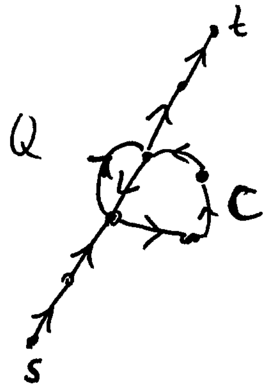
<u>Def. 2</u> Eine Kantenfolge $P = (v_0, a_1, v_1, \dots, a_m, v_m)$ heißt <u>(gerichteter) Kreis</u>, falls $v_0 = v_m$ und $|\{v_0, \dots, v_m\}| = m$ ist.

<u>Satz 3</u> Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph mit Längenfkt. $l : A \to \mathbb{R}$. Angenommen alle Kreise in D haben nichtnegative Länge. Seien $s, t \in V$, so dass es eine Kantenfolge mit Startknoten s und Endknoten t gibt. Dann gibt es eine kürzeste s-t-Kantenfolge, die auch ein Weg ist.

<u>Bew.</u>: Klar: $\exists$ ein kürzester s-t-Weg P. Ang. $\exists$ s-t-K.f. Q mit $l(Q) < l(P)$. Wähle solches Q mit minimaler Anzahl von Kanten. Da Q kein Weg ist enthält Q einen Kreis C. Nach Voraussetzung $l(C) \geq 0$.



Sei Q' die Kf., die man aus Q erhält, wenn man C löscht. Dann ist Q' ebenfalls s-t-Kantenf. mit

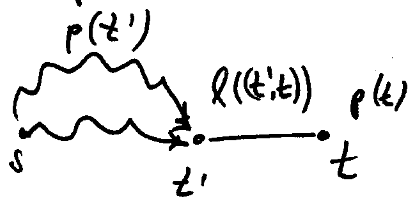
$$l(Q') = l(Q) - l(C) \leq l(Q) < l(P),$$

aber mit weniger Kanten als Q. Widerspruch! $\boxtimes$

Zurück zur Ausgangsfrage: Wie erkennt man, dass ein s-t Weg nicht der kürzeste ist?

Ang. $\exists$ s-t-Weg der Länge $p(t)$ und ang. $(t',t) \in A$ und $\exists$ s-t'-Weg der Länge $p(t')$. Falls

$p(t') + \ell((t',t)) < p(t)$ ist, war $p(t)$ nicht die Länge eines kürzesten s-t-Weges.



Def. 4 Eine Fkt. $p: V \to \mathbb{R}$ heißt Potential für $D = (V, A)$, $\ell: A \to \mathbb{R}$, falls

$$p(v) - p(u) \leq \ell(a) \qquad \text{für alle } a = (u, v) \in A$$

gilt.

Satz 5 Sei $D = (V, A)$ ger. Graph, $\ell: A \to \mathbb{R}$ Kantenlängenfkt. Dann gibt es ein Potential $p: V \to \mathbb{R}$ für D, ℓ genau dann wenn alle gerichteten Kreise in D nichtnegative Länge besitzen.

<u>Bew.:</u> <u>„$\Rightarrow$"</u>: Sei $C = (v_0, a_1, v_1, \ldots, a_m, v_m)$ ein Kreis mit $v_0 = v_m$ und sei $p: V \to \mathbb{R}$ ein Potential.

Dann ist die Länge von C

$$\ell(C) = \sum_{i=1}^{m} \ell(a_i) \geq \sum_{i=1}^{m} \left(p(v_i) - p(v_{i-1})\right) = 0.$$

<u>„$\Leftarrow$"</u>: Füge zu D einen neuen Knoten s_0 und neue Kanten (s_0, t) für alle $t \in V$ hinzu, wobei $\ell(s_0, t) = 0$ definiert wird.

<u>Beh.:</u> $p(t) = \mathrm{dist}(s_0, t)$ ist ein Potential.

<u>Bew.:</u> Zu zeigen:

$$\forall a = (u,v) \in A: \quad p(v) - p(u) = \mathrm{dist}(s_0, v) - \mathrm{dist}(s_0, u) \leq \ell(a)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathrm{dist}(s_0, v) \leq \mathrm{dist}(s_0, u) + \ell(a)$$

Betrachte einen kürzesten s_0-u-Weg P. Wenn man zu P die Kante a hinzufügt, erhält man eine s_0-v-Kantenfolge der Länge $\mathrm{dist}(s_0, u) + \ell(a)$.

$$s_0 \overset{\mathrm{dist}(s_0,u)}{\rightsquigarrow} u \longrightarrow v$$

Weil alle gerichteten Kreise in D, ℓ nicht-negative Länge haben, gibt es nach Satz 3 eine kürzeste s_0-v-Kantenfolge, die auch ein kürzester Weg ist.

D.h. $\quad \mathrm{dist}(s_0, v) \leq \mathrm{dist}(s_0, u) + \ell(a)$. $\boxtimes$

<u>Bem.</u>: Falls $\ell : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, dann ist $p = 0$ ein Potential.

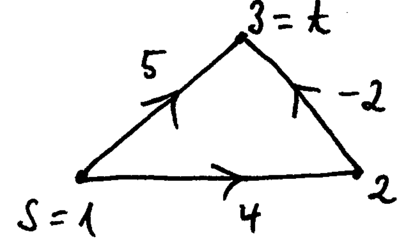
<u>Satz 6</u> (geometrische Modellierung kürzester Wege mit linearen Ungleichungen)

Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph mit Kantenlängenfunktion $\ell : A \to \mathbb{R}$. Angenommen in D, ℓ gibt es keine Kreise negativer Länge und angenommen für alle $v \in V$ gilt $d(s, v) < \infty$. Dann gilt die folgende Min-Max-Charakterisierung von $\mathrm{dist}(s, t)$:

$$\mathrm{dist}(s,t) = \min_{P \text{ } s\text{-}t\text{-Weg}} \ell(P)$$

$$= \max_{\substack{p : V \to \mathbb{R} \\ p(v) - p(u) \leq \ell(a) \quad \forall a = (u,v) \in A.}} p(t) - p(s)$$

Bsp. 7



$$\mathrm{dist}(1,3) = \max \; p(3) - p(1)$$
$$p(1), p(2), p(3) \in \mathbb{R}$$
$$p(2) - p(1) \leq 4$$
$$p(3) - p(1) \leq 5$$
$$p(3) - p(2) \leq -2$$

$$= \max \; (-1,0,1)\,p$$
$$p \in \mathbb{R}^3$$
$$\left.\begin{array}{l} (-1,1,0)\,p \leq 4 \\ (-1,0,1)\,p \leq 5 \\ (0,-1,1)\,p \leq -2 \end{array}\right\}$$

lineare Ungleichungen beschreiben ein geometrisches Gebilde im $\mathbb{R}^3$
$\rightarrow$ Teil B

<u>Bem.</u>: – $p = (0,4,1)$ beweist, dass es keine s-t-Wege der Länge < 1 gibt.

– Satz 6 gibt Antwort auf einleitende Frage: Um zu beweisen, dass ein s-t-Weg tatsächlich ein kürzester Weg ist, muss man nur ein Potential $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ angeben, das $\ell(P) = p(t) - p(s)$ erfüllt.