c) Die Relation „wegzusammenhängend" ist eine Äquivalenzrelation. Ihre Äquivalenzklassen heißen <u>Zusammenhangskomponenten</u>.

d) Falls G nur eine Zusammenhangskomponente besitzt, so heißt G <u>zusammenhängend</u>.

<u>Def. 3</u> Sei $G=(V,E)$ ein Graph heißt <u>bipartit</u>, falls es Teilmengen $U, W \subseteq V$ gibt, so dass

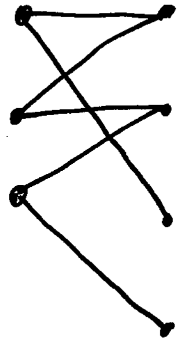
$$V = U \dot{\cup} W \qquad (\text{d.h. } V = U \cup W \text{ und } U \cap W = \emptyset)$$

und

$$\forall e \in E : |e \cap U| = |e \cap W| = 1$$

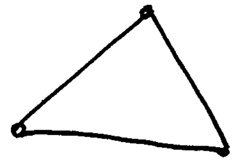
gilt.

<u>Bsp. 4</u>



bipartit

U W



nicht bipartit

§ 2 Berechnung von Matchings mit maximaler Kardinalität

Def. 1 Sei $G = (V,E)$ ein ungerichteter Graph.

a) Ein Matching M in G ist eine Teilmenge disjunkter Kanten, d.h.

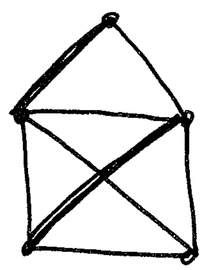
$$M \subseteq E \text{ ist Matching} \iff \forall e,f \in M,\ e \neq f: \ e \cap f = \emptyset$$

b) Die Matchingzahl von G ist

$$\nu(G) = \max\{\,|M| : M \subseteq E \text{ Matching in } G\,\}.$$

c) Ein Matching heißt perfekt, falls $2|M| = |V|$ gilt.

Bsp. 2

G 

$\nu(G) = 2$,
G besitzt kein perfektes Matching.

Notation Fasse Weg $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_m, v_m)$ als Teilmenge $P = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \subseteq E$ auf.

Def. 3 Sei $G=(V,E)$ ein ungerichteter Graph und sei $M \subseteq E$ ein Matching in G.

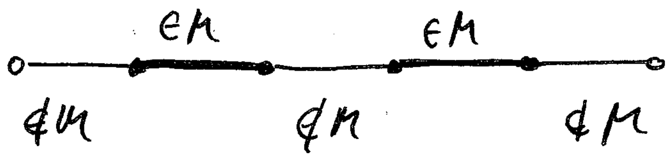
Ein Weg $P \subseteq E$ heißt <u>M-augmentierend</u>, falls die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

a) weder Start- noch Endknoten v_0, v_m werden von M überdeckt:

$$\forall e \in M: \quad v_0, v_m \notin e.$$

b) seine Kanten $e_1, \dots, e_m$ sind alternierend nicht aus M und aus M:

$$e_1 \notin M,\ e_2 \in M,\ e_3 \notin M,\ \dots,\ e_m \notin M.$$



Satz 4 Sei $G=(V,E)$ ein ungerichteter Graph und sei $M \subseteq E$ ein Matching in G. Dann gilt entweder $|M| = \nu(G)$, oder es gibt einen M-augmentierenden Weg.

Bew.: a) Ang. P ist ein M-augmentierender Weg.

Dann ist die symmetrische Differenz von M und P

$$M' = M \Delta P = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$$

ein Matching mit $|M'| = |M| + 1$. D. h.

$|M| < \nu(M)$.

b) Ang. $|M| \neq \nu(M)$. Dann gibt es ein Matching M' mit $|M'| > |M|$. Betrachte die Zusammenhangs-komponenten des Graph $G' = (V, M \cup M')$. Jeder Knoten hat höchstens zwei Nachbarn. Nun überlegt man sich (→ Aufgabe), dass die Zusammenhangs-komponenten nur aus Wegen (evtl. ohne Kante) oder aus Kreisen bestehen. Da $|M'| > |M|$ ist, muß es eine Zusammenhangskomponente in G' geben, die mehr Kanten aus M' als auch M besitzt. Diese Kanten aus M' definieren einen M-augmentierenden Weg. ⊠

<u>Algorithmus 5</u> Bestimmung von $\nu(G)$

<u>Eingabe</u>: $G = (V, E)$

<u>Ausgabe</u>: $M \subseteq E$ Matching in G mit $|M| = \nu(M)$.

$M = \emptyset$

while $\exists$ M-augmentierender Weg P:

  $M = M \Delta P$.

<u>Frage:</u> Wie findet man P?

a) Falls G bipartit: einfach ($\to$ hier)

b) Im allgemeinen Fall: Edmonds „Blüten"-Algorithmus ($\to$ Vorlesung „Effiziente Algorithmen").

<u>Def. 6</u>
Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit Partition $V = U \dot\cup W$. Sei $M \subseteq E$ ein Matching in G. Definiere den (gerichteten) Residualgraph $D_M = (V, A_M)$ durch

$$A_M = \{ (u,w) \in U \times W : \; e = \{u,w\} \in E \setminus M \} \cup$$
$$\cup \{ (w,u) \in W \times U : \; e = \{u,w\} \in E \cap M \}.$$

<u>Bsp. 7</u>