<u>Satz 8</u> Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit Partition $V = U \cup W$. Sei $M \subseteq E$ ein Matching in G. Seien $U_M \subseteq U$, $W_M \subseteq W$ die Knoten, die von M nicht überdeckt werden. Dann entspricht jeder gerichtete Weg in D_M von einem Knoten in U_M zu einem Knoten in W_M einem M-augmentierenden Weg und umgekehrt.

<u>Bew.:</u> klar nach Definition von D_M.

Algorithmische Umsetzung

Finde kürzeste Wege zwischen je zwei Knoten in U_M und W_M mit Bellman-Ford, wobei $l : A_M \to \mathbb{R}$, $l(a) = 1$ gesetzt wird

[Suboptimale Strategie; besser: verwende Tiefensuche].

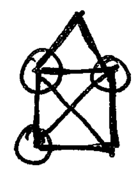
§ 3 Das Matchingtheorem von König

<u>Ziel:</u> Finde Min-max-Charakterisierung der Matchingzahl $\nu(G)$ in einem bipartiten Graph G.

<u>Def. 1</u> Sei $G=(V,E)$ ein ungerichteter Graph.

a) Eine Teilmenge $C \subseteq V$ heißt <u>Knotenüberdeckung</u> (von G), falls jede Kante einen Knoten aus C enthält, d.h.

$$\forall e \in E: \ |C \cap e| \geq 1.$$



b) Die <u>Knotenüberdeckungszahl</u> von G ist

$$\tau(G) = \min\{|C| : C \subseteq V \text{ Knotenüberdeckung von } G\}.$$

<u>Satz 2</u> (König, 1931)

Sei G ein bipartiter Graph. Dann gilt $\nu(G) = \tau(G)$.

<u>Bew.:</u> <u>$\nu(G) \leq \tau(G)$</u>: Sei M ein Matching in G und $C \subseteq V$ eine Knotenüberdeckung von G. Dann gilt $|M| \leq |C|$, weil je einer der Knoten einer Kante von M

zu U gehört.

<u>$\nu(G) \geq \tau(G)$:</u> Sei M ein Matching in G mit $|M| = \nu(G)$. Dabei

$$M = \{ \{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}, \dots, \{u_m, w_m\} \},$$

$$u_i \in U,\ w_i \in W.$$

Betrachte den Residualgraph D_M und definiere

$$C = \{v_1, \dots, v_m\}$$

durch

$$v_i = \begin{cases} w_i, & \text{falls es in } D_M \text{ einen gerichteten Weg von } \\ & U_M \text{ nach } w_i \text{ gibt} \\ u_i, & \text{sonst.} \end{cases}$$

<u>Beh.:</u> C ist Knotenüberdeckung mit $|C| = m$.

<u>Bew.:</u> Sei $\{a, b\} \in E$, o.B.d.A $a \in U, b \in W$,

zu zeigen: $a \in C$ oder $b \in C$.

<u>Fall 1:</u> $a \in U_M, b \in W_M$.

unmöglich nach Satz 2.8, weil $|M| = \nu(G)$.

Fall 2: $a \in U_M$, $b \notin W_M$.

Dann $(a,b) \in A_M$, also $b \in C$.

Fall 3: $a \notin U_M$, $b \in W_M$.

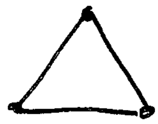
Dann ebenfalls $(a,b) \in A_M$. Ang. $a \notin C$. Da $a \notin U_M$ gibt es ein $w_i \in C$ mit $\{a, w_i\} \in M$, d.h. $(w_i, a) \in A_M$. Also gibt es in D_M einen gerichteten Weg von U_M nach w_i, der um $(w_i, a), (a,b)$ verlängert werden kann. Nach Satz 2.8 ist dies ein M-augmentierender Weg, dessen Existenz nach Satz 2.4 der Voraussetzung $|M| = \nu(G)$ widerspricht. D.h. $a \in C$.

Fall 4: $a \notin U_M$, $b \notin W_M$.

Falls $a \in C$, dann sind wir fertig. Sei $a \notin C$. Dann gibt es ein $w_i \in C$ mit $\{a, w_i\} \in M$. Falls $w_i = b$, dann $b \in C$ und wir sind fertig. Falls $w_i \neq b$, dann gibt es einen gerichteten Weg von U_M nach w_i und dieser kann um (w_i, a), (a,b) verlängert werden, d.h. $b \in C$. $\boxtimes$

Bem. 3 a) Die Ungleichung $\nu(G) \leq \tau(G)$ gilt auch für allgemeine Graphen.

b) $\nu(G) \geq \tau(G)$ ist aber im allg. falsch.

Bsp.:  $\nu(G) = 1$
$\tau(G) = 2$.

Korollar 4 (Hall, 1935)

Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit Bipartition $V = U \dot\cup W$. Dann ist $\nu(G) = |U|$ genau dann wenn für alle $X \subseteq U$ gilt

$$|\Gamma(X)| = |\{w \in W : \{x, w\} \in E,\ x \in X\}| \geq |X|.$$

Bew.: „$\Longrightarrow$": Sei M ein Matching in G mit $|M| = \nu(G) = |U|$. Da jeder Knoten in U in einer Kante von M enthalten ist, folgt die Beh. für $X \subseteq U$

$$|X| = |\{w \in W : \{x, w\} \in M,\ x \in X\}| \leq |\Gamma(X)|.$$

„$\Longleftarrow$": **Beh.:** U ist eine Knotenüberdeckung mit $|U| = \tau(G) \overset{S.2}{=} \nu(G)$.