Bew.: Sei $C \subseteq V$ eine Knotenüberdeckung von G.

Definiere $B = C \cap U$. Dann gilt

$$C \supseteq B \cup \Gamma(U \setminus B),$$

weil C eine Knotenüberdeckung ist. Also

$$|U| = |B| + |U \setminus B| \overset{\text{Vor.}}{\leq} |B| + |\Gamma(U \setminus B)|$$
$$\leq |C|,$$

und die Beh. folgt, weil U eine Knotenüberdeckung ist. $\boxtimes$

Korollar 5 („Heiratssatz")

Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit Bipartition $V = U \,\dot\cup\, W$. G besitzt ein perfektes Matching genau dann, wenn $|U| = |W|$ ist und

$$\forall X \subseteq U : \quad |\Gamma(X)| \geq |X|.$$

Bew.: unmittelbar aus Korollar 4.

§ 4 Die ungarische Methode: Berechnung von Matchings mit maximalem Gewicht

<u>Def. 1</u> Sei $G=(V,E)$ ein ungerichteter Graph und sei $w: E \to \mathbb{R}$ eine Gewichtsfkt. auf den Kanten von G.

a) Für $M \subseteq E$ definiere das <u>Gewicht</u> von M als

$$w(M) = \sum_{e \in M} w(e).$$

b) Die <u>gewichtete Matchingzahl</u> von G und w ist

$$\nu_w(G) = \max\{w(M) : M \subseteq E \text{ Matching in } G\}.$$

Falls $w=1$, dann ist $\nu_w(G) = \nu(G)$.

<u>Def. 2</u> Sei $G=(V,E)$ ein ungerichteter Graph und M sei ein Matching in G. Sei $w: E \to \mathbb{R}$ eine Gewichtsfkt. Das Matching M heißt <u>extrem</u> (für G und w), falls $\forall M' \subseteq E$ Matching in G mit $|M'| = |M|$ gilt $w(M') \leq w(M)$.

Def. 3 Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit Gewichtsfkt. $w: E \to \mathbb{R}$. Sei $M \subseteq E$ ein Matching in G. Definiere die Kantenlängenfkt.

$l_M : E \to \mathbb{R}$ durch

$$l_M(e) = \begin{cases} w(e), & \text{falls } e \in M \\ -w(e), & \text{falls } e \notin M. \end{cases}$$

Für $P \subseteq E$ definiere $l(P) = \sum_{e \in P} l(e)$.

Satz 4 Seien $G = (V, E)$, $w: E \to \mathbb{R}$ gegeben. Sei $M \subseteq E$ ein extremes Matching für G und w und sei $P \subseteq E$ ein M-augmentierender Weg minimaler Länge. Dann ist $M' = M \Delta P$ extrem für G und w.

Bew.: Sei N ein extremes Matching mit $|N| = |M| + 1$. Da $|N| > |M|$ ist, enthält, wie im Beweis von Satz 2.4, der Graph $G' = (V, M \cup N)$ eine Zusammenhangskomp., die ein M-augmentierender Weg ist. Dieser heiße Q. Dann $l_M(Q) \geq l_M(P)$. Es ist $N \Delta Q$ ein Matching mit $|N \Delta Q| = |M|$. Also $w(N \Delta Q) \leq w(M)$, weil M extrem ist. Zusammen:

$$w(N) = w(N \Delta Q) - \ell_M(Q) \leq w(M) - \ell_M(P) = w(M').$$

D.h. M' ist extrem. $\boxtimes$

<u>Algo 5</u> Die „ungarische" Methode, Egerváry 1931

<u>Eingabe</u> $G = (V, E)$ ungerichteter Graph, $w : E \to \mathbb{R}$ Gewichtsfkt.

<u>Ausgabe</u> $\nu_w(G)$

$M_0 = \emptyset$, $k = 1$
while $\exists$ M_{k-1}-augmentierender Weg
  Wähle M_{k-1}-augm. Weg P mit minimaler Länge
  $M_k = M_{k-1} \Delta P$
  $k = k+1$
output $\max\{w(M_i) : i = 0, 1, \ldots, k-1\}$.

<u>Korollar 6</u> Algo. 5 ist korrekt, d.h. er berechnet $\nu_w(G)$.

<u>Bew.:</u> folgt unmittelbar aus Satz 4: Jedes M_k ist ein extremes Matching. $\boxtimes$

Zur Bestimmung eines M_{k-1}-augmentierenden Weges mit minimaler Länge:

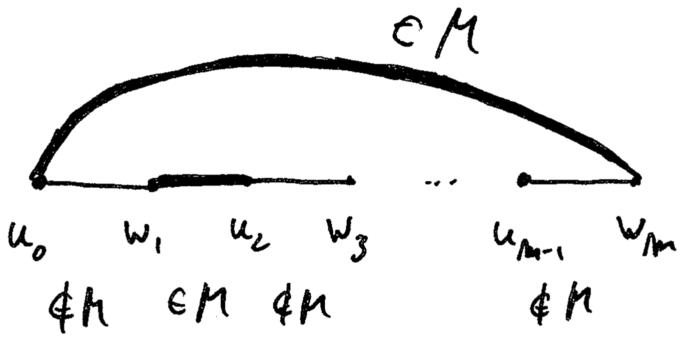
Sei $M = M_{k-1}$. Versehe Residualgraph D_M mit Kantenlängenfkt. $l_M : A_M \to \mathbb{R}$ durch

$$l_M((a,b)) = l_M(\{a,b\}) \quad \text{(siehe Def. 3).}$$

Nun kann man einen kürzesten Weg von einem Knoten in U_M zu einem Knoten in W_M mit Hilfe des Algo. von Bellman-Ford finden, weil D_M keine gerichteten Kreise negativer Länge besitzt:

__Satz 7__ Seien $G = (V,E)$, $w : E \to \mathbb{R}$ gegeben. Sei $M \subseteq E$ ein extremes Matching für G, w. Dann besitzt der Residualgraph D_M keine gerichteten Kreise negativer Länge.

__Bew.:__ Angenommen $C \subseteq E$ entspricht einem ger. Kreis in D_M mit $l_M(C) < 0$. Dann haben wir folgende Situation:



Dann ist $M' = M \Delta C$ ein Matching mit $|M'| = |M|$ und es gilt

$$w(M') = w(M) - l_M(C) > w(M).$$

D.h. M ist nicht extrem. Widerspruch! $\boxtimes$