Kapitel III Flüsse in Netzwerken

§1 Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem

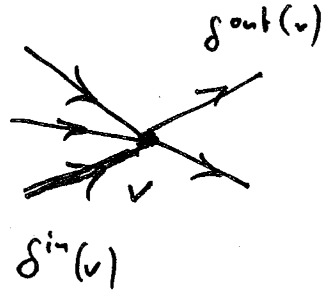
<u>Def. 1</u> Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph. Seien $s, t \in V$ Knoten von D, s wird <u>Quelle</u> (source) und t wird <u>Senke</u> (terminal) genannt.

a) Eine Fkt. $f : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt <u>s-t-Fluss</u>, falls das <u>Flusserhaltungsgesetz</u> für alle Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$ erfüllt ist, d.h.

$$\forall v \in V \setminus \{s,t\} : \sum_{a \in \delta^{in}(v)} f(a) = \sum_{a \in \delta^{out}(v)} f(a),$$

wobei

$$\delta^{in}(v) = \{(w,v) \in A : w \in V\}$$
$$\delta^{out}(v) = \{(v,w) \in A : w \in V\}$$



b) Der <u>Wert</u> eines s-t-Flusses ist definiert als

$$\text{value}(f) = \sum_{a \in \delta^{out}(s)} f(a) - \sum_{a \in \delta^{in}(s)} f(a)$$

$$\left[= \sum_{a \in \delta^{in}(t)} f(a) - \sum_{a \in \delta^{out}(t)} f(a) \right]$$

c) Ein s-t-Fluss f heißt <u>beschränkt</u> durch eine <u>Kapazitätsfkt.</u> $c: A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, falls gilt

$$\forall a \in A: f(a) \leq c(a)$$

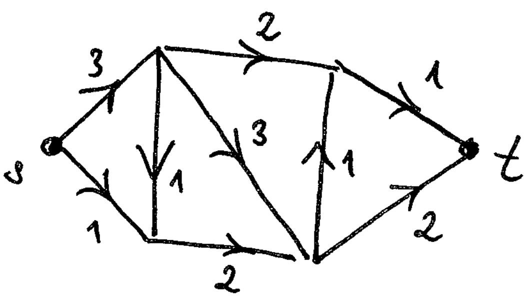
<u>Notation</u>: $f \leq c$

d) Das <u>Max-Flow-Problem</u> ist wie folgt definiert:

<u>gegeben</u>: $D = (V, A)$, $s, t \in V$, $c: A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

<u>finde</u>: $\max\{\mathrm{value}(f) : f: A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ s-t-Fluss, $f \leq c\}$.

<u>Bsp. 2</u>



$\mathrm{value}(f) \in [0, 4]$

$\mathrm{value}(f) = 3$.

<u>Klar</u>: Das Maximum existiert und liegt zwischen 0 und

$$\sum_{a \in \delta^{out}(s)} c(a).$$

<u>Def. 3</u> Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph und seien $s, t \in V$.

a) Die Teilmenge $U \subseteq V$ definiert die <u>Schnitte</u>

$\delta^{in}(U) = \{(v, u) \in A : v \in V, u \in U\}$, $\delta^{out}(U) = \{(u, v) \in A : u \in U, v \in V$

b) Falls $s \in U$, $t \notin U$ ist, heißen die Schnitte $\delta^{in}(U)$, $\delta^{out}(U)$ <u>s-t-Schnitte</u>

c) Sei $c : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine <u>Kapazitätsfkt.</u> Dann ist

$$c(\delta^{out}(U)) = \sum_{a \in \delta^{out}(U)} c(a)$$

die <u>Kapazität</u> des Schnittes $\delta^{out}(U)$ [analog für $\delta^{in}(U)$].

d) Das <u>Min-Cut-Problem</u> ist wie folgt definiert:

<u>gegeben:</u> $D = (V, A)$, $s, t \in V$, $c : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

<u>finde:</u> $\min \{ c(\delta^{out}(U)) : U \subseteq V, s \in U, t \notin U \}$.

<u>Satz 4</u> (Max-Flow-Min-Cut-Theorem; Ford-Fulkerson 1954)
Seien $D = (V, A)$, $s, t \in V$, $c : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben. Dann gilt:

$$\max_{\substack{f : A \to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ f \text{ s-t-Fluss} \\ f \leq c}} \text{value}(f) = \min_{U \subseteq V,\, s \in U,\, t \notin U} c(\delta^+(U))$$

<u>Wichtiger Zusatz</u>: Falls $c : A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (c ganzzahlig), dann gibt es einen maximalen Fluss $f : A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (f ganzzahlig).

Lemma 5 Seien $D=(V,A)$, $s,t\in V$, $c: A\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, $f: A\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ s-t-Fluss mit $f\leq c$ und $U\subseteq V$ mit $s\in U, t\notin U$ gegeben. Dann gilt

$$\text{value}(f)\leq c(\delta^{out}(U)) \qquad (*)$$

Desweiteren gilt Gleichheit in $(*)$ gdw.

$$\forall a\in\delta^{out}(U): f(a)=c(a) \quad \text{und} \quad \forall a\in\delta^{in}(U): f(a)=0$$

Bew.:

$$\text{value}(f)=\sum_{a\in\delta^{out}(s)} f(a)-\sum_{a\in\delta^{in}(s)} f(a)$$

$$\overset{\text{Fluss-erhaltung}}{=}\sum_{a\in\delta^{out}(s)} f(a)-\sum_{a\in\delta^{in}(s)} f(a) + \sum_{v\in U\setminus\{s\}}\underbrace{\left(\sum_{a\in\delta^{out}(v)} f(a)-\sum_{a\in\delta^{in}(v)} f(a)\right)}_{=0}$$

$$=\sum_{v\in U}\left(\sum_{a\in\delta^{out}(v)} f(a)-\sum_{a\in\delta^{in}(v)} f(a)\right)$$

$$=\sum_{a\in\delta^{out}(U)} f(a)-\sum_{a\in\delta^{in}(U)} f(a)$$

$$\leq\sum_{a\in\delta^{out}(U)} c(a) = c(\delta^{out}(U)).$$

$\boxtimes$