



Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. F. von Heymann

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2015

— Aufgabenblatt 5 —

Aufgabe 5.1 Sei $B_3^p = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_p \leq 1\}$ die drei-dimensionale Einheitskugel zu der Norm $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^3 |x_i|^p\right)^{1/p}$. Für welche $p \geq 1$ ist B_3^p ein Polytop?

Aufgabe 5.2 Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Zirkulation*, wenn in jedem Knoten $v \in V$ das Flusserhaltungsgesetz gilt:

$$\sum_{a \in \delta^{\text{out}}(v)} f(a) = \sum_{a \in \delta^{\text{in}}(v)} f(a).$$

Sei \mathcal{C} die Menge der gerichteten Kreise in D . Der *charakteristische Vektor* von $C \in \mathcal{C}$ ist

$$\chi^C \in \{0, 1\}^A \quad \text{mit} \quad \chi^C(a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } C \text{ durch } a \text{ geht,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: Die Menge der nichtnegativen Zirkulationen $f : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist gleich dem Kegel

$$\{w \in \mathbb{R}^A : w = \sum_{C \in \mathcal{C}} \alpha_C \chi^C \text{ mit } \alpha_C \geq 0 \text{ für alle } C \in \mathcal{C}\}$$

Aufgabe 5.3 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: die Dimension von A ist n genau dann, wenn das Innere der konvexen Hülle von A nicht leer ist, d.h.:

$$\dim(A) = n \iff \text{int}(\text{conv}(A)) \neq \emptyset.$$

Aufgabe 5.4 (Präsenzübung) Für $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist der *Epigraph* von f definiert als $\text{epi}(f) = \{(a, \mu) \in U \times \mathbb{R} : f(a) \leq \mu\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Sei U offen und konvex, und f dreimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie:

$\text{epi}(f)$ ist konvex genau dann, wenn für alle $a \in U$ die Hesse-Matrix $H_f(a)$ positiv semidefinit ist.

Abgabe: Bis Dienstag, 12. Mai, 10:00 Uhr.

Aufgabe 5.1 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01). Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben. Aufgabe 5.2 oder 5.3 auf der Vorlesungshomepage eintragen.