Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. F. von Heymann

# Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2015

**— Aufgabenblatt 6 —**

**Aufgabe 6.1** Es seien $x$ und $y$ zwei verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Menge der Punkte, die bzgl. der euklidischen Norm mindestens so nah zu $x$ wie zu $y$ liegen, einen Halbraum bildet.

**Aufgabe 6.2** Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge. Für $x, y \in C$ gelte stets $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in C$. Zeigen Sie, dass die Menge $C$ konvex ist.

**Aufgabe 6.3** Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein konvexer Kegel. Der *zu $K$ duale Kegel* ist definiert als

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n : y^{\mathsf{T}} x \geq 0 \text{ für alle } x \in K\}.$$

Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt:

$$(K^*)^* = \overline{K}.$$

**Aufgabe 6.4 (Präsenzübung)**

(a) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ die Lösungsmenge einer quadratischen Ungleichung,

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : x^{\mathsf{T}} A x + b^{\mathsf{T}} x + c \leq 0\},$$

wobei $A \in S^n$ eine symmetrische Matrix ist, $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $C$ konvex ist, falls $A$ positiv semidefinit ist.

(b) Beschreiben Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} : x_1 x_2 \geq 1\}$ als einen Durchschnitt von Halbräumen.

**Abgabe:** Bis Dienstag, 19. Mai, 10:00 Uhr.
Aufgabe 6.1 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01). Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben. Aufgabe 6.2 oder 6.3 auf der Vorlesungshomepage eintragen.