**Def. 6** Seien $D = (V, A)$, $s, t \in V$, $c : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ $s$-$t$-Fluss mit $f \leq c$ gegeben. Definiere den Residualgraph $D_f = (V, A_f)$ durch

$$A_f = \{a \in A : f(a) < c(a)\} \cup \{a^{-1} \in A^{-1} : f(a) > 0\},$$

wobei für $a = (u, v) \in A$ $a^{-1} = (v, u)$ und $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$ gesetzt werden.

**Lemma 7** Seien die Vor. von Def. 6 gegeben. Angenommen $D_f$ enthält keinen gerichteten $s$-$t$-Weg. Seien $U \subseteq V$ die Knoten, die in $D_f$ von $s$ aus erreichbar sind. Dann ist $\text{value}(f) = c(\delta^{out}(U))$. Insbesondere ist $f$ nach Lemma 5 optimal.

**Bew.:** Wir wissen aus dem Beweis von Lemma 5, dass $\text{value}(f) = \sum_{a \in \delta^{out}(U)} f(a) - \sum_{a \in \delta^{in}(U)} f(a)$ ist. Für $a \in \delta^{out}(U)$ gilt $a \notin A_f$, d.h. $f(a) = c(a)$. Für $a \in \delta^{in}(U)$ gilt $a^{-1} \notin A_f$, d.h. $f(a) = 0$. Somit $\text{value}(f) = c(\delta^{out}(U))$. $\boxtimes$

<u>Bew.</u> (von Satz 4)

<u>$\max \leq \min$:</u> Lemma 5

<u>$\max \geq \min$:</u> Sei $f$ ein optimaler $s$-$t$-Fluss mit $f \leq c$. <u>Zu zeigen:</u> Es gibt $U \subseteq V$ mit $s \in U$, $t \notin U$ und $\operatorname{value}(f) = c(\delta^{out}(U))$.

Betrachte $D_f$. Falls es keinen ger. $s$-$t$-Weg in $D_f$ gibt, können wir Lemma 7 anwenden und erhalten ein solches $U$.

Ang. es gibt $s$-$t$-Weg $P$ in $D_f$. Definiere $\chi^P : A \to \mathbb{R}$ durch

$$\chi^P(a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } P \text{ die Kante } a \text{ durchläuft} \\ -1, & \text{falls } P \text{ die Kante } a^{-1} \text{ durchläuft} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

[$P$ kann nicht sowohl $a$ als auch $a^{-1}$ durchlaufen, weil $P$ ein Weg ist.].

Dann ist $f' = f + \varepsilon \chi^P$ für genügend kleines $\varepsilon > 0$ ebenfalls ein $s$-$t$-Fluss mit $f' \leq c$. Dann ist

$$\operatorname{value}(f') = \operatorname{value}(f) + \varepsilon,$$ im Widerspruch zur Optimalität von $f$.

<u>Zusatz:</u> Falls $c$ ganzzahlig war, kann $\varepsilon = 1$ gewählt werden.



$\boxtimes$

## Algorithmus 8 (Ford-Fulkerson)

Eingabe $D=(V,A)$, $s,t \in V$, $c: A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Ausgabe $f: A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ s-t-Fluss, $f \leq c$, value($f$) maximal

$f = 0$
while $\exists$ ger. s-t-Weg $P$ in $D_f$
  $f = f + \varepsilon \chi^P$, wobei $\varepsilon > 0$ max. gewählt, so dass $0 \leq f + \varepsilon \chi^P \leq c$ gilt.

**Satz 9** Falls $c(a) \in \mathbb{Q}$ $\forall a \in A$ ist, dann terminiert Algo. 8 in endlich vielen Schritten; sonst im Allg. nicht.

**Bew.:** Es gibt ein $K \in \mathbb{N}$ mit $K c(a) \in \mathbb{N}$ für alle $a \in A$. D.h. in jeder Iteration ist $\varepsilon$ ein Vielfaches von $1/K$. Der Wert des Flusses vergrößert sich mind. um $1/K$. Da value$(f) \leq c(\delta^{out}(\{s\}))$ ist, terminiert der Algo. nach höchstens $K c(\delta^{out}(\{s\}))$-vielen Schritten. $\boxtimes$

**Bem. 10** a) Es gibt tatsächlich Beispiele mit $c(a) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so dass Algo 8 nicht terminiert (→ siehe Schrijver-CO, 10.4a)

b) <u>Problem</u>: Welchen ger. $s$-$t$-Weg $P$ in $D_f$ verwendet man?

Dinits (1970), Edmonds-Karp (1972): Wähle $s$-$t$-Weg minimaler Länge. Dann ist die Anzahl der Iterationen $\leq |V| \cdot |A|$. Insbesondere <u>unabh.</u> von der Kapazitätsfkt.

# Teil B Einführung in die lineare Optimierung

## Kapitel IV Konvexe Mengen

### § 1 Motivation

Viele Optimierungsprobleme des OR lassen sich als ein <u>lineares Programm</u> formulieren:

<u>geg.:</u> $c \in \mathbb{R}^n$, $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$

<u>ges.:</u> $\min \{ c^T x : x \in \mathbb{R}^n, \ a_j^T x \le b_j, \ j = 1, \dots, m \}$.

$c$ definiert die <u>Zielfkt.</u> $x \mapsto c^T x$; $a_j^T x \le b_j$ sind <u>lineare Ungleichungen</u>, die die Nebenbedingungen beschreiben.

<u>Notation:</u> $Ax \le b$ für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ mit

$$A = \begin{bmatrix} - & a_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & a_m^T & - \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

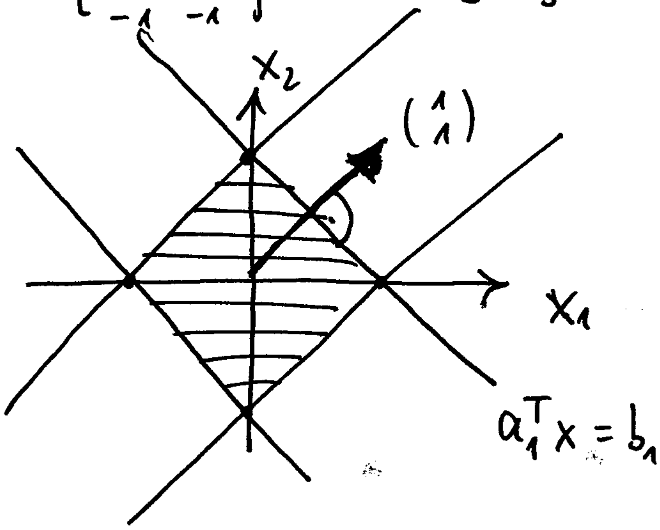
Manchmal kommt noch eine Ganzzahligkeitsbedingung $x \in \mathbb{Z}^n$ hinzu ($\rightarrow$ Teil C)

Teil B: • Wie sieht die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ der zulässigen Lösungen geometrisch aus?

• Wie kann man die Min-Max-Charakterisierungen geometrisch begründen?

• Erweiterung der linearen Algebra über $\mathbb{R}$ durch Nichtnegativitätsbedingungen.

Bsp.: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

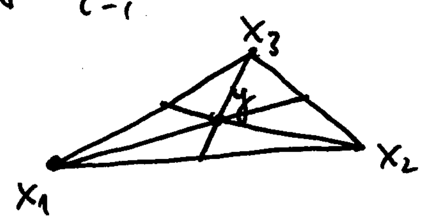



Dies ist ein (konvexes) Polyeder.

## § 2 Grundbegriffe

Def. 1 a) Seien $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$ Punkte. Dann ist $y \in \mathbb{R}^n$ eine <u>Konvexkombination</u> von $x_1, \dots, x_N$, falls

$$y = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \quad \text{mit } \alpha_1, \dots, \alpha_N \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 .$$




$y = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ Schwerpunkt ist Konvexkombination.