b) Eine Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>konvex</u>, wenn sie unter der Bildung von Konvexkombinationen abgeschlossen ist, d.h.

$$\forall N \in \mathbb{N}\ \forall x_1, \dots, x_N \in C\ \forall \alpha_1, \dots, \alpha_N \geq 0,\ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \implies$$

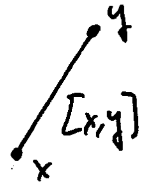
$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \in C.$$

c) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Die <u>konvexe Hülle</u> von A ist

$$\operatorname{conv} A = \bigcap_{\substack{B \supseteq A \\ B \text{ konvex}}} B.$$

d) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Die <u>Verbindungsstrecke</u> zwischen x und y ist

$$[x,y] = \operatorname{conv}\{x,y\} = \{(1-\alpha)x + \alpha y : \alpha \in [0,1]\}.$$



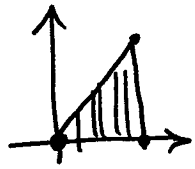
e) Eine Menge $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt (konvexes) <u>Polytop</u>, falls

$$P = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_N\} \text{ für } x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n \text{ ist.}$$

D.h. Polytope sind die konvexen Hüllen <u>endlich</u> vieler Punkte.

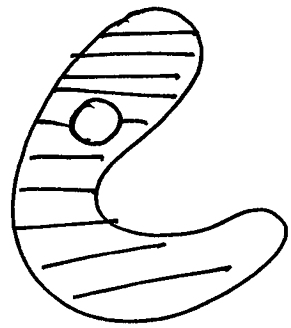
<u>Bem. 2</u> Da der Durchschnitt von konvexen Mengen wieder konvex ist, ist die konvexe Hülle von A die inklusionskleinste konvexe Menge, die A enthält.

$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$



conv(A)

Bsp. 3 a)



ist keine konvexe Menge.

b) Sei $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist die zugehörige Einheitskugel $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ eine konvexe Menge:

Seien $x_1, \dots, x_N \in K$, $\alpha_1, \dots, \alpha_N \geq 0$, $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$. Dann

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \underbrace{\|x_i\|}_{\leq 1} \leq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1.$$

Satz 4 Eine Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ist konvex $\Longleftrightarrow$
$\forall x, y \in C: \ [x, y] \subseteq C$.

Bew.: „$\Longrightarrow$": trivial: Spezialfall der Def für $N = 2$

„$\Longleftarrow$": Zeige per Induktion nach N: Jede Konvexkombination mit $\leq N$ Punkten aus C liegt wieder in C.

$N = 1$: ✓

$N \to N+1$: Sei $y = \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i x_i$ mit $x_i \in C$, $\alpha_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$.

1. Fall $\alpha_{N+1} = 1$

Dann $\alpha_1 = \ldots = \alpha_N = 0$ und $y = x_{N+1} \in C$.

2. Fall $\alpha_{N+1} \neq 1$

Nach Induktionsvor. ist

$$y' = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{N+1}} x_i \in C, \quad \text{weil } \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{N+1}} \geq 0$$

$$\text{und } \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{N+1}} = 1.$$

Weiter

$$y = (1-\alpha_{N+1}) y' + \alpha_{N+1} x_{N+1} \in [y', x_{N+1}] \subseteq C. \qquad \boxtimes$$

Satz 5 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\operatorname{conv} A = \Big\{ y \in \mathbb{R}^n : N \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_N \in A, \alpha_1, \ldots, \alpha_N \geq 0, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1, \; y = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \Big\}.$$

D.h. conv A besteht aus allen Konvexkombinationen der Menge A.

Bew.: „$\subseteq$": trivial

„$\supseteq$": Sei B konvex mit $A \subseteq B$. Da B abg.

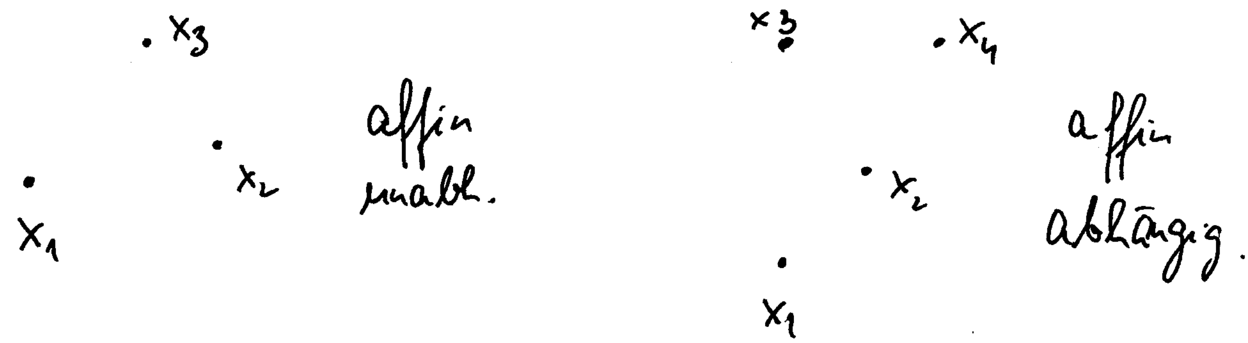
unter der Bildung von Konvexkomb., gilt für jede Wahl von $N \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_N \in A$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \geq 0$, $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$ stets $y = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \in B$. $\boxtimes$

Def. 6 Die Punkte $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n$ heißen <u>affin unabhängig</u>, falls

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_N : \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 0, \ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_N = 0$$

M.a.W. die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 1 \\ x_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ sind lin. unabh.

Bsp. 7



Def. 8 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Die <u>Dimension</u> von A ist

$$\dim A = \max\{ N-1 : x_1, \ldots, x_N \in A \text{ affin unabh.} \}.$$

Def. 9 a) Seien $v_1, \ldots, v_N \in \mathbb{R}^n$ Vektoren. Dann ist $w \in \mathbb{R}^n$ eine <u>konische Kombination</u> von $v_1, \ldots, v_N$, falls $w = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i v_i$, $\alpha_i \geq 0$.

b) Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>(konvexer) Kegel</u>, falls K unter der Bildung von konischen Komb. abg. ist.

c) Ein konvexer Kegel $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>spitz</u>, falls aus $x, -x \in K$ stets $x = 0$ folgt.

d) Ein konvexer Kegel $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>ordentlich</u>, falls er spitz, abgeschlossen (in der Topologie von $\mathbb{R}^n$) und voll-dimensional ($\dim K = n$) ist.

Ordentliche Kegel sind <u>Positivitätsbereiche</u> und definieren eine <u>partielle Ordnung</u> auf dem $\mathbb{R}^n$:

$$x \geq_K y \iff x - y \in K$$

- Falls $K = [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$, dann ist $x \geq_K y$ einfach $x \geq y$.
- Kann passieren: es gilt weder $x \geq_K y$ noch $y \geq_K x$.

  D.h. x, y nicht vergleichbar bzgl. K (<u>partielle</u> Ordnung).

e) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Die <u>konische Hülle</u> von A ist

$$\operatorname{cone}(A) = \{ w \in \mathbb{R}^n : N \in \mathbb{N}, v_1, \dots, v_N \in A, \alpha_1, \dots, \alpha_N \geq 0, w = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i w_i \}.$$