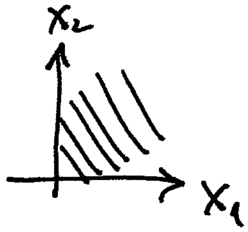
f) Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **endlich erzeugter Kegel**, falls $K = \operatorname{cone}\{v_1, \dots, v_N\}$ für $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R}^n$ ist.

Bsp. 10

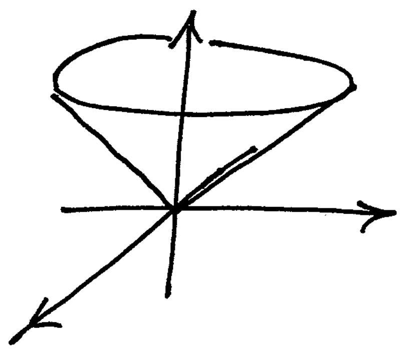
$\mathbb{R}^n_{\geq 0} = \operatorname{cone}\{e_1, \dots, e_n\}$ ist endl. erzeugter Kegel

(„**Nichtnegativer Orthant**")



$\mathcal{L}^{n+1} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \leq t\}$ ist nicht endl. erzeugter Kegel

(„**Lorentzkegel**")



Satz 11 a) $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist konvexer Kegel $\iff$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta \geq 0,\ v, w \in K:\ \alpha v + \beta w \in K.$

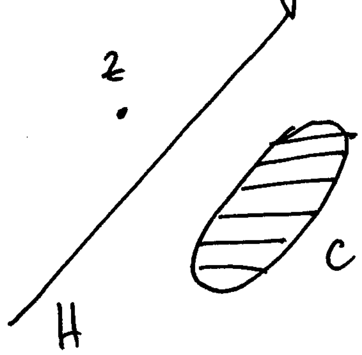
b) $\operatorname{cone}(A) = \{ w : N \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \dots, \alpha_N \geq 0,\ v_1, \dots, v_N \in A,\ w = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i v_i \}.$

Bew.: siehe Satz 4, 5.

§ 3 Trennungsätze

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene konvexe Menge, $C \neq \emptyset$.

<u>Fundamentale Eigenschaft</u>: Jeder Punkt $z \notin C$ kann durch eine Hyperebene von C getrennt werden



Wichtige Verallg. in der Funktionalanalysis: Satz von Hahn-Banach.

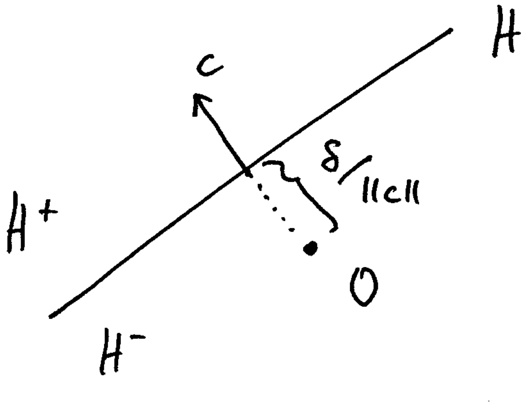
<u>Def. 1</u> a) Eine Menge $H \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>(affine) Hyperebene</u>, falls es einen Vektor $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und ein $\delta \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = \delta\}$$

b) Die abgeschlossenen und konvexen Mengen

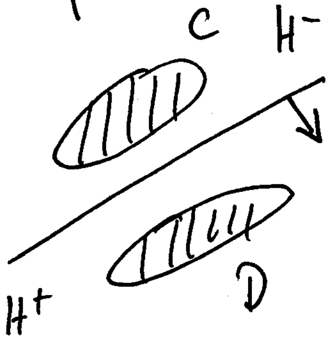
$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \geq \delta\}, \quad H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \leq \delta\}$$

heißen <u>Halbräume</u>.

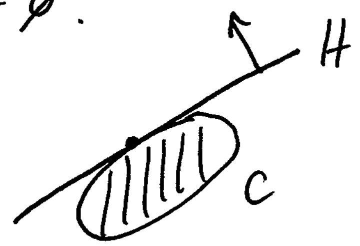


Def. 2 Seien $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$.

a) Eine Hyperebene H heißt <u>Trennhyperebene</u> von C und D, falls $C \subseteq H^-$ und $D \subseteq H^+$ (oder umgekehrt)

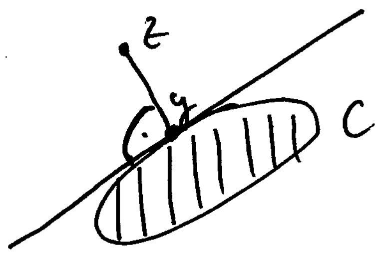


b) Eine Hyperebene H heißt Stützhyperebene von C, falls $C \subseteq H^-$ und $C \cap H \neq \emptyset$.



Frage Wie findet man Trenn- bzw. Stützhyperebenen?

Antwort Verwende metrische Projektion (= beste Approximation von $z \notin C$ an C = orthogonale Projektion von z auf C, falls C affin linear ist).

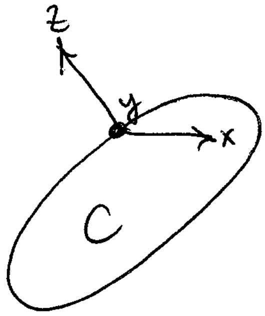


Lemma 3 Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ abg. und konvex, $C \neq \emptyset$. Sei $z \notin C$. Dann

$$\exists!\, y \in C : \quad \|y - z\| = \inf_{x \in C} \|x - z\| \qquad \left(\frac{\text{Notation:}}{y = \Pi_C(z)}\right)$$

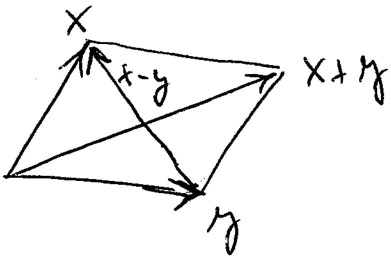
und es gilt die Ungleichung

$$(z-y)^T(x-y) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in C.$$



<u>Bew.</u>: (funktioniert in bel. Hilberträumen)

<u>Zur Erinnerung</u>: Parallelogrammgleichung



Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

<u>Zur Existenz von y</u>: Sei $d = \inf_{x \in C} \|x-z\|$. Wir können oBdA (durch Translation) annehmen, dass $z = 0$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \in C$, so dass $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = d$.

<u>Beh.</u>: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.

<u>Bew.</u>: Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt nach der Parallelogrammgleichung

$$\Big\|\underbrace{\frac{x_n+x_m}{2}}_{\substack{\in C \\ \Rightarrow \|\ldots\|^2 \geq d^2}}\Big\|^2 + \underbrace{\Big\|\frac{x_n-x_m}{2}\Big\|^2}_{\Rightarrow \to 0} = \underbrace{\frac{1}{2}\|x_n\|^2 + \frac{1}{2}\|x_m\|^2}_{\to d^2}.$$

Weil $\mathbb{R}^n$ vollständig ist, konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Weil C abgeschlossen ist, ist der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n$ ebenfalls in C.
Dann ist $y = \lim_{n\to\infty} x_n$ ein y mit der gewünschten Eigenschaft.

<u>Zur Eindeutigkeit von y</u> Ang. es gibt $y, y' \in C$, $y \neq y'$ und $\|y\| = \|y'\| = \inf_{x\in C} \|x\|$. Dann ist

$$\|\underbrace{\tfrac{y+y'}{2}}_{\in C}\|^2 < \|\tfrac{y+y'}{2}\|^2 + \|\tfrac{y-y'}{2}\|^2 \overset{\text{P.6.}}{=} \tfrac{1}{2}\|y\|^2 + \tfrac{1}{2}\|y'\|^2 = d^2,$$

was ein Widerspruch zur Minimalität von d ist.

<u>Zusatz</u> $(z-y)^T(x-y) \leq 0$ für alle $x \in C$

Sei $\alpha \in [0,1]$. Dann ist

$$\begin{aligned}\|z-y\|^2 &\leq \|z - \overbrace{((1-\alpha)y + \alpha x)}^{\in C}\|^2 \\ &= \|z - y + \alpha(y-x)\|^2 \\ &= \|z-y\|^2 + 2\alpha(z-y)^T(y-x) + \alpha^2\|y-x\|^2\end{aligned}$$

Also für $\alpha \in (0,1]$:

$$(z-y)^T(y-x) \leq \frac{\alpha}{2}\|y-x\|^2$$

und die Beh. folgt, da rechte Seite bel. klein ≥ 0 ist. $\boxtimes$