<u>Korollar 4</u> Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, konvex, $C \neq \emptyset$. Die metrische Projektion Π_C ist Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante 1. D.h. Π_C ist eine Kontraktion.

<u>Bew.:</u> Seien $z, z' \in \mathbb{R}^n$ und $y = \Pi_C(z)$, $y' = \Pi_C(z')$. Zur Vereinfachung der Formeln nehmen wir o.B.d.A. $z' = 0$ an. Es ist $\|y - y'\| \leq \|z\|$ zu zeigen.

Nach Lemma 3 ist

$$(z-y)^T(y'-y) \leq 0 \quad \text{und} \quad (-y')^T(y-y') \leq 0.$$

Zusammen $(-z+y-y')^T(y-y') \leq 0$.

Nun gilt

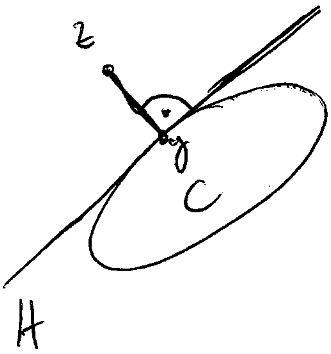
$$\begin{aligned}
\|y-y'\|^2 &= (y-y')^T(y-y') \\
&= \underbrace{(-z+y-y')^T(y-y')}_{\leq 0} + z^T(y-y') \\
&\leq z^T(y-y') \\
&= z^Tz + z^T(-z+y-y') \\
&= z^Tz + \underbrace{(z-y+y')^T(-z+y-y')}_{\leq 0} + \underbrace{(y-y')^T(-z+y-y')}_{\leq 0} \\
&\leq z^Tz = \|z\|^2.
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

Satz 5 Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$, $C \neq \emptyset$, abg. und konvex. Sei $z \notin C$.
Dann gibt es eine Trennhyperebene von $\{z\}$ und C.

Bew.: Definiere Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = \delta\}$ mit

$c = z - y$ und $\delta = c^T y$, wobei $y = \Pi_C(z)$.



Beh.: a) $z \in H^+$
b) $C \subseteq H^-$.

Bew.: a) $c^T z \geq \delta \iff (z-y)^T z \geq c^T y$

$$\iff (z-y)^T z \geq (z-y)^T y$$

$$\iff (z-y)^T (z-y) \geq 0. \quad \checkmark$$

b) Für $x \in C$ gilt

$$c^T x \leq \delta \iff (z-y)^T x \leq (z-y)^T y \iff (z-y)^T (x-y) \leq 0$$

✓
Lemma 3

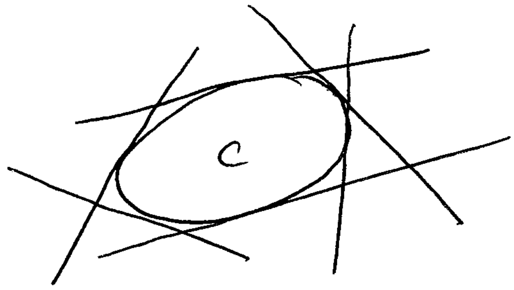
$\boxtimes$

Bem. 6 Die im Beweis konstruierte Hyperebene H ist eine Stützhyperebene von C. Falls $\delta \in (c^T y, c^T z)$ gewählt wäre, wäre H eine strikte Trennhyperebene von $\{z\}$ und C, d.h.

$z \in H^+$, $z \notin H$, $C \subseteq H^-$ und $C \cap H = \emptyset$.

Korollar 7 Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere, abgeschlossene und konvexe Menge. Dann gilt

$$C = \bigcap_{\substack{H \text{ Stützhyperebene} \\ \text{von } C}} H^- .$$



Bew.: „$\subseteq$": klar

„$\supseteq$": Allgemein gilt $A \supseteq B \iff \mathbb{R}^n \setminus A \subseteq \mathbb{R}^n \setminus B$.

Sei $z \in \mathbb{R}^n \setminus C$. Dann gibt es nach Satz 5 (& Bem. 6) eine Stützhyperebene von C, die z von C trennt. Also

$$z \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{H \text{ S.H. von } C} H^- .$$

$\boxtimes$

Def. 8 Eine Menge $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Polyeder, falls es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ gibt, so dass

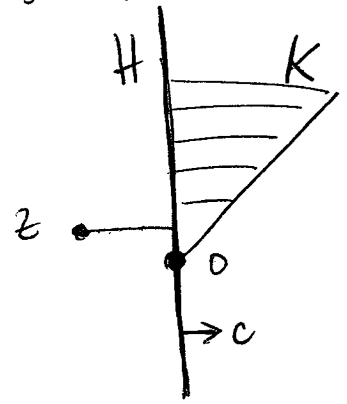
$$P = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \}$$

gilt.

Polyeder $\hat{=}$ Lösungsmenge eines Systems linearer Ungleichungen;
Durchschnitt endlich vieler Halbräume
(vergleiche Korollar 7)

Satz 9 Sei $K \neq \emptyset$ ein abgeschlossener, konvexer Kegel im $\mathbb{R}^n$. Sei $z \notin K$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}^n$ mit $c^T z < 0$ und $c^T x \geq 0$ für alle $x \in K$.

D.h. $H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = 0\}$ ist Trennhyperebene von $\{z\}$ und K. Sie ist Stützhyperebene von K.



Bew.: Setze wieder

$$c = y - z \quad \text{mit} \quad y = \pi_K(z).$$

Beh.: $c^T y = 0$.

Bew.: Ang. $c^T y \neq 0$.

1. Fall $c^T y > 0$

Es ist $(1-\varepsilon) y \in K$ für kleinen $\varepsilon > 0$.

Desweiteren $\|(1-\varepsilon)y - z\|^2 = \|y - z - \varepsilon y\|^2$

$$= \|y-z\|^2 - 2\varepsilon (y-z)^T y + \varepsilon^2 \|y\|^2$$

Für $\varepsilon < \frac{2c^T y}{\|y\|^2}$ ist $-2\varepsilon (y-z)^T y + \varepsilon^2 \|y\|^2 < 0$,

was ein Widerspruch zur Minimalität von $\|y-z\|^2$ ist.

2. Fall $c^T y < 0$

genauso mit $(1+\varepsilon) y \in K$ und $\varepsilon \in \left(0, \frac{-2c^T y}{\|y\|^2}\right)$.

Einerseits

$$0 > c^T z \iff 0 > c^T(z-y) = c^T(-c).$$

Andererseits für $x \in K$

$$c^T x \geq 0 \iff (y-z)^T x \geq 0 \iff (y-z)^T(x-y) \geq 0$$
$$\iff (z-y)^T(x-y) \leq 0 \quad \checkmark \text{ (Lemma 3)}. \qquad \boxtimes$$

<u>Satz 10</u> Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$, $C \neq \emptyset$, eine abgeschlossene und konvexe Menge. Dann gibt es für jeden Randpunkt $y \in \partial C$ von C einen Punkt $x \notin C$ mit $\pi_C(x) = y$.

<u>Bew.</u>: Wir können oBdA annehmen, dass C beschränkt ist (andererseits ersetze C durch $C \cap B$, wobei B eine genügend große Kugel um y ist). Da nun C beschränkt ist, gibt es eine Kugel B mit $C \subseteq B$ und $C \cap \partial B = \emptyset$. Konstruiere nun ein $x \in \partial B$ mit $\pi_C(x) = y$: Wähle eine Folge $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $y_i \in \mathbb{R}^n \setminus C$ und $\|y - y_i\| \leq \frac{1}{i}$. Also $\lim_{i \to \infty} y_i = y$. Weil π_C eine Kontraktion ist (Korollar 4) gilt