Einerseits

$$0 > c^T z \iff 0 > c^T (z-y) = c^T(-c).$$

Andererseits für $x \in K$

$$c^T x \geq 0 \iff (y-z)^T x \geq 0 \iff (y-z)^T (x-y) \geq 0$$
$$\iff (z-y)^T (x-y) \leq 0 \quad \checkmark \quad \text{(Lemma 3)}. \qquad \boxtimes$$

<u>Satz 10</u> Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$, $C \neq \emptyset$, eine abgeschlossene und konvexe Menge. Dann gibt es für jeden Randpunkt $y \in \partial C$ von C einen Punkt $x \notin C$ mit $\pi_C(x) = y$.

<u>Bew.</u>: Wir können oBdA annehmen, dass C beschränkt ist (andererseits ersetze C durch $C \cap B$, wobei B eine genügend große Kugel um y ist). Da nun C beschränkt ist, gibt es eine Kugel B mit $C \subseteq B$ und $C \cap \partial B = \emptyset$. Konstruiere nun ein $x \in \partial B$ mit $\pi_C(x) = y$: Wähle eine Folge $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $y_i \in \mathbb{R}^n \setminus C$ und $\|y - y_i\| \leq \frac{1}{i}$. Also $\lim_{i \to \infty} y_i = y$. Weil π_C eine Kontraktion ist (Korollar 4) gilt

$$\| y - \pi_C(y_i) \| = \| \pi_C(y) - \pi_C(y_i) \| \leq \| y - y_i \| \leq \frac{1}{i}.$$

Definiere einen Punkt $x_i \in \partial B$ wie folgt: Betrachte die Gerade, die durch y_i und $\pi_C(y_i)$ verläuft. Schneide diese Gerade mit ∂B. Mindestens einer der beiden Schnittpunkte x_i hat die Eigenschaft $\pi_C(x_i) = \pi_C(y_i)$. Da ∂B kompakt ist, besitzt die Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $x \in \partial B$. Dann, und weil π_C stetig ist, gilt

$$y = \pi_C(y) = \pi_C\left(\lim_{j\to\infty} y_{i_j}\right) = \lim_{j\to\infty} \pi_C(y_{i_j})$$

$$= \lim_{j\to\infty} \pi_C(x_{i_j}) = \pi_C\left(\lim_{j\to\infty} x_{i_j}\right) = \pi_C(x).$$

$\boxtimes$

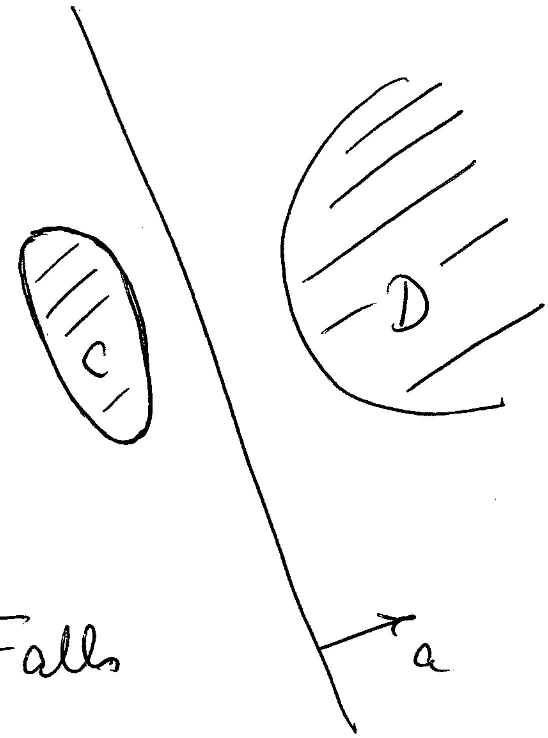
<u>Korollar 11</u> Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$, $C \neq \emptyset$, eine abgeschlossene und konvexe Menge. Sei $x \in \partial C$. Dann gibt es eine Stützhyperebene H an C mit $x \in H$.

<u>Bew.</u>: folgt aus Satz 10 und dem Beweis von Satz 5.

$\boxtimes$

Satz 12 Seien $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleere konvexe Mengen mit $C \cap D = \emptyset$. Dann gibt es ein $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit

$$\sup_{x \in C} a^T x \le \inf_{x \in D} a^T x$$



Bew: Betrachte die (konvexe) Menge

$$C - D = \{ c - d : c \in C, d \in D \}.$$

Nach Voraussetzung ist $0 \notin C - D$. Falls $0 \notin \overline{C-D}$, verwende metrische Projektion $\Pi_{\overline{C-D}}$ wie im Beweis von Satz 5 zur Definition von a.

Falls $0 \in \overline{C-D}$, verwende die in Satz 10 / Korollar 11 konstruierte Stützhyperebene an $\overline{C-D}$, die durch $0 \in \partial \overline{C-D}$ läuft, zur Definition von a. $\boxtimes$

§ 3 Konische Optimierung

3 wichtige (ordentliche) Kegel:

<u>Def. 1</u> a) $\mathbb{R}^n_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$

heißt der <u>nicht-negative Orthant</u>.

b) $\mathcal{L}^{n+1} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \leq t\}$

heißt <u>Lorentzkegel</u>.

c) $S^n_{\geq 0} = \{X \in S^n :$ X symmetrische, positiv semidefinite Matrix $\}$

heißt der Kegel der positiv semidefiniten Matrizen (<u>PSD-Kegel</u>).

<u>Def. 2</u> Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kegel. Dann heißt

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n : y^T x \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n\}$$

der zu K <u>duale Kegel</u>.

<u>Satz 3</u> a) $(\mathbb{R}^n_{\geq 0})^* = \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ b) $(\mathcal{L}^{n+1})^* = \mathcal{L}^{n+1}$

c) $(S^n_{\geq 0})^* = S^n_{\geq 0}$ d) $(K^*)^* = \overline{K}$.

Bew.: a) sehr einfach b) Aufgabe 7.3

c) Aufgabe 7.4 d) Aufgabe 6.3. $\boxtimes$

Zu c): Was bedeutet $y^T x \geq 0$ für alle $x \in S^n_{\geq 0}$?

Der Raum der symmetrischen Matrizen S^n ist ein $\frac{n(n+1)}{2}$ - dimensionaler euklidischer Raum mit Skalarprodukt $\langle X, Y \rangle = \mathrm{Tr}(XY) = \sum_{i,j=1}^{n} X_{ij} Y_{ij}$.

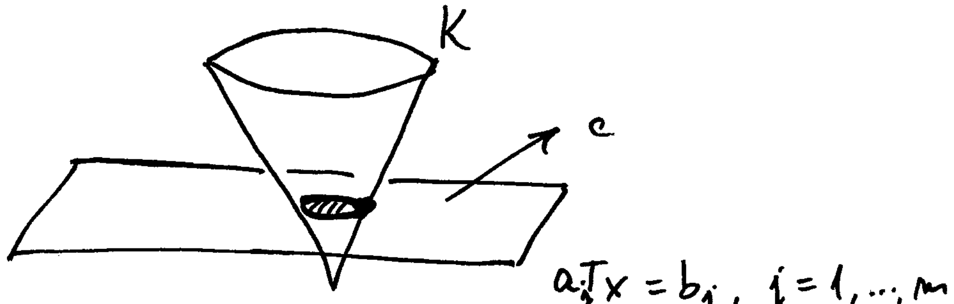
Def. 4 Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein ordentlicher Kegel. Gegeben seien $c, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$, $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$. Ein primales konisches Programm (in Standardform) ist das folgende Maximierungsproblem

$$(P) \quad p^* = \sup \; c^T x$$
$$x \in K$$
$$a_j^T x = b_j, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Das zugehörige duale konische Programm (in Standardform) ist das folgende Minimierungsproblem

$$(D) \quad d^* = \inf \sum_{j=1}^{m} b_j y_j = b^T y$$
$$y \in \mathbb{R}^m$$
$$\sum_{j=1}^{m} y_j a_j - c \in K^*$$

Bem.: – primales konisches Programm: maximiere eine lineare Fkt. über Durchschnitt eines Kegels mit einem affinen Unterraum.



– Anstatt $a_j^T x = b_j$, $j = 1, \dots, m$, schreibt man auch oft

$$Ax = b, \quad A = \begin{bmatrix} - a_1^T - \\ \vdots \\ - a_m^T - \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m$$

Genauso: $A^T y - c$ für $\sum_{j=1}^{m} y_j a_j - c$

Def. 5 a) $x \in \mathbb{R}^n$ heißt <u>zulässig</u> für (P), falls $Ax = b$ und $x \in K$. x heißt <u>strikt zulässig</u> für (P), falls $Ax = b$ und $x \in \operatorname{int} K$.

b) $y \in \mathbb{R}^m$ heißt <u>zulässig</u> für (D), falls $A^T y - c \in K^*$ und <u>strikt zulässig</u> für (D), falls $A^T y - c \in \operatorname{int} K^*$.

Def. 6 a) Falls $K = \mathbb{R}^n_{\geq 0}$, dann heißen (P), (D) <u>lineare Programme</u>. (LP)