b) Falls $K = \mathcal{L}^{n+1}$, dann heißen (P), (D) <u>konisch quadratische Programme</u> (CQP)

c) Falls $K = \mathcal{S}^n_{\geq 0}$, dann heißen (P), (D) <u>semidefinite Programme</u> (SDP)

Diese Vorlesung: vor allem a). Vorlesung „Konvexe Optimierung" (WS 2015/16): vor allem c).

<u>Bsp. 7</u> Max-Flow als LP

$$\max\{\text{value}(f) : f \text{ s-t-Fluss}, f \leq c\}$$

$$= \max \sum_{a \in \delta^{out}(s)} f(a) - \sum_{a \in \delta^{in}(s)} f(a)$$

$$(f, g) \in \mathbb{R}^A_{\geq 0} \times \mathbb{R}^A_{\geq 0}$$

$$\sum_{a \in \delta^{out}(v)} f(a) - \sum_{a \in \delta^{in}(v)} f(a) = 0 \qquad \forall v \in V \setminus \{s, t\}$$

$$c - f = g$$

<u>Satz 8</u> (Dualitätstheorie von konischen Programmen)

a) (schwache Dualität)

Sei x zulässig für (P) und y zulässig für (D). Dann ist $c^T x \le y^T b$. Insbesondere $p^* \le d^*$.

b) (Komplementarität)

Sei x optimal für (P) und y optimal für (D). Dann

$$(A^T y - c)^T x = 0.$$

c) (Optimalitätsbedingung)

Sei x zulässig für (P), y zulässig für (D). Dann sind x, y optimal, falls $(A^T y - c)^T x = 0$ gilt.

d) (starke Dualität)

Falls $d^* > -\infty$ und (D) strikt zulässig ist, dann $\exists$ zulässige Lösung x von (P) mit $p^* = c^T x$ und es ist $p^* = d^*$.

Falls $p^* < \infty$ und (P) strikt zulässig ist, dann $\exists$ zulässige Lösung y von (D) mit $d^* = y^T b$ und es ist $p^* = d^*$.

<u>Bew.:</u>

a) – c): $\quad y^T b - c^T x = y^T A x - c^T x = (A^T y - c)^T x \geq 0.$

d): allgemeiner Fall: $\rightarrow$ Vorlesung „Konvexe Opt."

LP-Fall: $\rightarrow$ Kapitel $\underline{\text{V}}$.

$\boxtimes$

Kapitel V - Polyedertheorie

Die Menge der zulässigen Lösungen von LPs

(P) $\qquad \{x \in \mathbb{R}^n : x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}, \ Ax = b\}$

(D) $\qquad \{y \in \mathbb{R}^m : y^T A - c \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}\}$

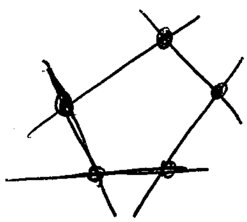
sind Polyeder, d.h. Mengen von der Form

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \quad \text{für } A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m.$$

(vgl. Def. IV.3.8)

§1 Extrempunkte und Ecken

<u>Def. 1</u> Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Ein Punkt $z \in C$ heißt <u>Extrempunkt</u> von C, falls für alle $x, y \in C$ mit $z = \alpha x + (1-\alpha) y$ und $\alpha \in (0,1)$ stets $x = z = y$ folgt. Die Menge aller Extrempunkte von C wird mit $\mathrm{ext}(C)$ bezeichnet.

<u>Bsp. 2</u> a)  5 Extrempunkte

b)  ∞-viele Extrempunkte.

Def. 3 Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ein Polyeder

a) Die Extrempunkte von P heißen Ecken.

b) Für $z \in P$ bezeichne mit A_z die Teilmatrix von A, die genau die Zeilen mit $a_i^T z = b_i$ enthält („aktive Ungleichungen an z").

Satz 4 Es sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ein Polyeder und $z \in P$. Dann gilt: z ist Ecke von $P \Longleftrightarrow \operatorname{rang} A_z = n$.

Bew.: „$\Longrightarrow$" Angenommen $\operatorname{rang} A_z < n$. Dann gibt es ein $c \neq 0$ mit $A_z c = 0$. Da $a_i^T z < b_i$ für alle Zeilen von A gilt, die nicht zu A_z gehören, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$a_i^T(z + \delta c) \leq b_i \quad \text{und} \quad a_i^T(z - \delta c) \leq b_i.$$

Also: $A(z + \delta c) \leq b$ und $A(z - \delta c) \leq b$, und

$$z + \delta c,\ z - \delta c \in P.$$

D.h. $z = \frac{1}{2}(z + \delta c) + \frac{1}{2}(z - \delta c)$ und somit ist z keine Ecke von P.

„$\Longleftarrow$": Angenommen es ist $z = \alpha x + (1-\alpha) y$ mit $x, y \in P$ und $\alpha \in (0,1)$. Für eine Zeile a_i^T von A_z gilt

$$b_i = a_i^T z = a_i^T(\alpha x + (1-\alpha) y) = \alpha a_i^T x + (1-\alpha) a_i^T y$$
$$\leq \alpha b_i + (1-\alpha) b_i = b_i.$$

Weil $\alpha \in (0,1)$ ist, muss $a_i^T x = a_i^T y = b_i$ sein, und zwar für alle Zeilen von A_z. Da $\operatorname{rang} A_z = n$, hat das System $a_i^T w = b_i$, i Zeile von A_z, eine eindeutige Lösung. D.h. $x = z = y$ und z ist eine Ecke von P. $\boxtimes$

<u>Korollar 5</u> Ein Polyeder hat nur endlich viele Ecken.

<u>Bew.:</u> Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kann man höchstens $\binom{m}{n}$ Teilmatrizen A_z mit $\operatorname{rang} A_z = n$ finden. D.h. es gibt höchstens $\binom{m}{n}$ Ecken. $\boxtimes$