Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. F. von Heymann

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2015

— Aufgabenblatt 11 —

Aufgabe 11.1 Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph und $l : A \to \mathbb{Z}$ eine Längenfunktion, so dass es keine negativen gerichteten Kreise in D gibt. Seien außerdem $s, t \in V$ so, dass es einen Weg von s nach t in D gibt.

(a) Finden Sie ein lineares Programm, das die Länge eines kürzesten s-t-Wegs berechnet. Verwenden Sie hierzu die Inzidenzmatrix M von D.

(b) Dualisieren Sie das Programm aus (a).

Aufgabe 11.2 Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph und seien $c, d \in \mathbb{Z}^A$. Angenommen, es gibt eine Zirkulation (siehe Aufgabe 5.2 für die Definition) $f : A \to \mathbb{R}$ mit $c_a \leq f(a) \leq d_a$ für jedes $a \in A$. Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Unimodularität der Inzidenzmatrix M von D, dass es auch eine ganzzahlige Zirkulation $g : A \to \mathbb{Z}$ mit $c_a \leq g(a) \leq d_a$ gibt.

Aufgabe 11.3 Es sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph und $k \in \mathbb{N}$. Definiere P als die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren von Knotenüberdeckungen $K \subseteq V$ mit $|K| = k$, also

$$P = \operatorname{conv}\{\chi^K : K \subseteq V \text{ Knotenüberdeckung von } G \text{ und } |K| = k\}.$$

Beschreiben Sie P mit Hilfe von linearen Ungleichungen.

Aufgabe 11.4 (Präsenzübung) Es sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Eine *unabhängige Menge* $U \subseteq V$ ist eine Teilmenge der Knotenmenge für die gilt: $\{u, v\} \notin E$ für alle $u, v \in U$. Das *Unabhängigkeitspolytop* von G ist definiert als die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren von unabhängigen Mengen. Beschreiben Sie das Unabhängigkeitspolytop mit Hilfe von linearen Ungleichungen.

Abgabe: Bis Dienstag, 30. Juni, 10:00 Uhr.
Aufgabe 11.1 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01). Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben. Aufgabe 11.2 oder 11.3 auf der Vorlesungshomepage eintragen.

Bitte wenden

Allgemeine Formel für duale lineare Programme:

Gegeben sei eine Matrix, ein Spaltenvektor und ein Zeilenvektor

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & K \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad (d \;\; e \;\; f)$$

wobei $A, B, C, D, E, F, G, H, K$ Matrizen, a, b, c Spaltenvektoren und d, e, f Zeilenvektoren sind. Dann gilt, unter den Bedingungen der starken Dualität (Satz V.4.3.d),

$$\begin{aligned} \max\{dx + ey + fz : {} & x \geq 0, z \leq 0, & \quad = \quad \min\{ua + vb + wc : {} & u \geq 0, w \leq 0, \\ & Ax + By + Cz \leq a, & & uA + vD + wG \geq d, \\ & Dx + Ey + Fz = b, & & uB + vE + wH = e, \\ & Gx + Hy + Kz \geq c\} & & uC + vF + wK \leq f\}. \end{aligned}$$

(Siehe Aufgabe 9.3 aus dem letzten Jahr für eine Herleitung)