Satz 6 (Minkowski; Krein-Milman)

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte und konvexe Menge.
Dann gilt $\quad C = \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(C))$.

Bew.: „$\supseteq$": ✓

„$\subseteq$": per Induktion nach $\dim C$. Sei $x \in C$.

$\dim C = -1$: trivial, $C = \emptyset$, d.h. x ex. nicht.

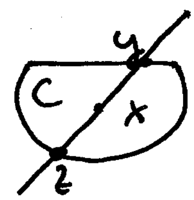
$\dim C = 0$: Dann $C = \{x\}$. ✓

$\dim C > 0$: 1. Fall: $x \in \partial C$.

Dann gibt es nach Korollar IV.3.11 eine Stützhyperebene an C durch x. Betrachte $F = H \cap C$.
Diese Menge ist konvex und kompakt und $\dim F < \dim C$.
Nach I.V. ist $x \in \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(F))$. Da $\operatorname{ext}(F) \subseteq \operatorname{ext}(C)$ ist, folgt die Behauptung.

2. Fall: $x \notin \partial C$.

Dann ist der Schnitt einer Geraden durch x mit C eine Strecke $[y, z]$ mit $y, z \in \partial C$.



Nach dem 1. Fall gilt $y, z \in \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(C))$.
Also auch $x \in \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(C))$. $\boxtimes$

<u>Korollar 7</u> Sei P ein beschränktes Polyeder. Dann ist P die konvexe Hülle seiner Ecken. <u>Insbesondere</u>: Ein beschränktes Polyeder ist ein Polytop.

<u>Bew.</u>: Satz 6 und Korollar 5.

Auch die Umkehrung gilt: Ein Polytop ist ein beschränktes Polyeder.

<u>Def 8</u> Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$A^\times = \{y \in \mathbb{R}^n : x^T y \le 1 \text{ für alle } x \in A\}$$

die <u>Polare</u> von A.

<u>Lemma 9</u> a) Für $\alpha > 0$ gilt $(\alpha A)^\times = \frac{1}{\alpha} A^\times$, wobei allgemein $\beta B = \{\beta b : b \in B\}$ für $\beta \in \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert ist.

b) $A \subseteq B \Rightarrow A^\times \supseteq B^\times$

c) $(B_n)^\times = B_n$, wobei $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T x \le 1\}$ die n-dimensionale Einheitskugel ist.

d) $P = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_t\} \Longrightarrow P^\times = \{y \in \mathbb{R}^n : x_1^T y \le 1, \dots, x_t^T y \le 1\}$

Bew.: a), b) einfaches Überprüfen.

c) „$\subseteq$": Sei $y \in (B_n)^\times$. Falls $y = 0$, dann $y \in B_n$.

Falls $y \neq 0$, dann $y^T \frac{1}{\|y\|} y \leq 1$. D.h.

$\frac{\|y\|^2}{\|y\|} \leq 1$ und somit $\|y\| \leq 1$, d.h. $y \in B_n$.

„$\supseteq$": Seien $x, y \in B_n$. Dann gilt nach Cauchy-Schwarz:

$x^T y \leq \|x\| \cdot \|y\| = 1$. Also $x \in (B_n)^\times$.

d) „$\subseteq$": klar

„$\supseteq$": Ang. y erfülle $x_1^T y \leq 1, \dots, x_t^T y \leq 1$. Sei $z \in P$.

Dann ist z eine Konvexkombination von $x_1, \dots, x_t$:

$z = \sum_{i=1}^t \alpha_i x_i$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^t \alpha_i = 1$. Desweiteren:

$z^T y = \left(\sum_{i=1}^t \alpha_i x_i\right)^T y = \sum_{i=1}^t \alpha_i x_i^T y \leq \sum_{i=1}^t \alpha_i = 1$.

Also $y \in P^\times$. ⊠

Satz 10 (Weyl)

Ein Polytop ist ein beschränktes Polyeder.

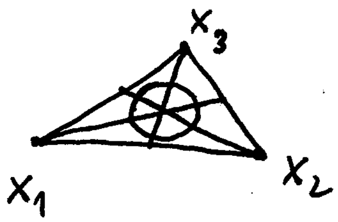
<u>Bew.:</u> Sei $P = \mathrm{conv}\{x_1, \dots, x_t\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polytop.

oBdA. $0 \in P$ (durch Translation)

oBdA. $\dim P = n$ (durch Einschränkung auf $\mathrm{span}\{x_1, \dots, x_t\}$)

oBdA. $x_1, \dots, x_{n+1}$ affin unabhängig (durch Umnummerierung)

Für den Schwerpunkt $x_0 = \frac{1}{n+1}(x_1 + \dots + x_{n+1})$ gibt es ein $r > 0$, so dass $x_0 + rB_n \subseteq P$ ist. oBdA $x_0 = 0$ (nach Translation). Nach Lemma 9 a)-c) gilt $P^\times \subseteq \frac{1}{r} B_n$, also ist $P^\times$ beschränkt und nach Lemma 9 d) ist $P^\times$ ein Polyeder. Nach Korollar 7 (Minkowski) ist $P^\times$ ein Polytop, d.h. es gibt $y_1, \dots, y_s \in \mathbb{R}^n$ mit $P^\times = \mathrm{conv}\{y_1, \dots, y_s\}$.



<u>Beh.:</u> $P = \{x \in \mathbb{R}^n : y_1^T x \le 1, \dots, y_s^T x \le 1\}$.

<u>Bew.:</u> <u>„$\subseteq$":</u> Sei $x \in P$. Dann gilt $y_i^T x \le 1$, weil $y_i \in P^\times$.

<u>„$\supseteq$":</u> Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $y_i^T x \le 1$, $i = 1, \dots, s$. Ang. $x \notin P$.

Dann gibt es nach Satz $\underline{\text{IV}}$.3.5 eine Trennhyperebene von $\{x\}$ und P: $\exists\, c \ne 0, \delta \in \mathbb{R}$: $c^T x > \delta$, $c^T x' \le \delta \ \forall x' \in P$.

Da $0 \in P$ ist $\delta \geq 0$. Kann $\delta = 1$ wählen (durch Skalieren von c). Dann ist $c \in P^\times$ und somit gibt es $\alpha_j \geq 0$, $\sum \alpha_j = 1$ und $c = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j y_j$. Dann

$$1 < c^T x = \left(\sum_{j=1}^{s} \alpha_j y_j\right)^T x = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \, y_j^T x \leq 1. \quad \lightning$$

Also muss $x \in P$ sein. $\boxtimes$

<u>Korollar 11</u> (Theorem von Minkowski-Weyl)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist

P ein beschränkter Polyeder $\Longleftrightarrow$ P ist ein Polytop.