Da $0 \in P$ ist $\delta \geq 0$. Kann $\delta = 1$ wählen (durch Skalieren von d). Dann ist $c \in P^\times$ und somit gibt es $\alpha_j \geq 0$, $\sum \alpha_j = 1$ und $c = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j y_j$. Dann

$$1 < c^T x = \left(\sum_{j=1}^{s} \alpha_j y_j\right)^T x = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \, y_j^T x \leq 1. \quad \lightning$$

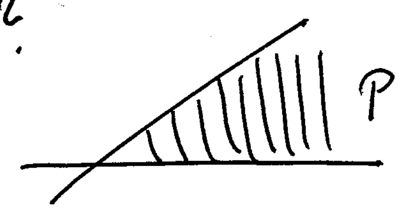
Also muss $x \in P$ sein. $\boxtimes$

<u>Korollar 11</u> (Theorem von Minkowski-Weyl)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist

P ein beschränkter Polyeder $\iff$ P ist ein Polytop.

Wie sehen allgemeine, evtl. unbeschränkte, Polyeder aus?



<u>Satz 12</u> (Minkowski-Weyl für Kegel).

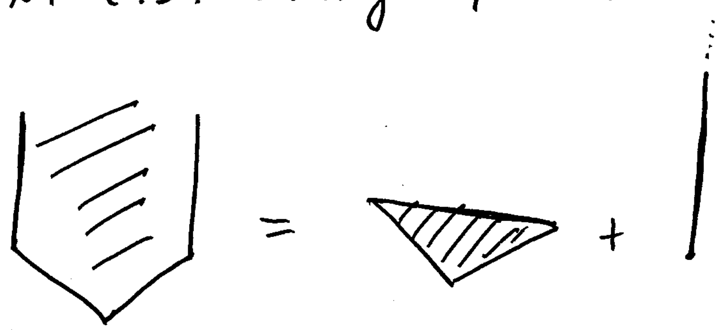
Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist C ein endlich erzeugter Kegel (d.h. C ist von der Form $C = \operatorname{cone}\{y_1, \dots, y_t\}$) $\iff$ $\exists A \in \mathbb{R}^{m \times n}$: $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$.

Bew.: siehe z.B. Chapter 7 in Schrijver - Theory of linear and integer programming, 1986.

Satz 13 (Minkowski-Weyl allgemein)
Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist P ein Polyeder $\iff$
$\exists x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_t \in \mathbb{R}^n : P = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_s\} + \operatorname{cone}\{y_1, \dots, y_t\}$,
wobei $A + B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$.

Bew.: ebenfalls z.B. Schrijver, 1986.

Bsp. 14



§ 2 Eliminationverfahren von Fourier und Motzkin

Algorithmisches Grundproblem der Polyedertheorie: Gegeben $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$: Entscheide, ob $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \neq \emptyset$.

Ähnlich zu Grundproblem der linearen Algebra:
Entscheide, ob $L = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\} \neq \emptyset$.
$\rightarrow$ Eliminationverfahren von Gauß.

Betrachte die ersten r Bedingungen:

$$x_1 + a_i'^T \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \le \tilde{b}_i \implies x_1 \le \tilde{b}_i - a_i'^T \tilde{x}, \quad i = 1, \dots, r$$

Genauso die nächsten s Bedingungen:

$$-x_1 + a_{r+j}'^T \tilde{x} \le \tilde{b}_{r+j} \implies x_1 \ge a_{r+j}'^T \tilde{x} - \tilde{b}_{r+j}, \quad j = 1, \dots, s$$

Zusammen:

$$\sup_{j=1,\dots,s} a_{r+j}'^T \tilde{x} - \tilde{b}_{r+j} \le x_1 \le \inf_{i=1,\dots,r} \tilde{b}_i - a_i'^T \tilde{x} \qquad (**)$$

[Falls $s = 0$, dann $\sup = -\infty$; falls $r = 0$, dann $\inf = +\infty$]

Also kann man x_1 eliminieren und $(*)$ ist äquivalent zu:

$$a_{r+j}' \tilde{x} - \tilde{b}_{r+j} \le \tilde{b}_i - a_i' \tilde{x} \qquad i = 1, \dots, r, \; j = 1, \dots, s$$

$$a_i^T \tilde{x} \le \tilde{b}_i, \qquad i = r+s+1, \dots, m$$

bzw. zu

$$\left(a_{r+j}'^T + a_i'^T\right) \tilde{x} \le \tilde{b}_i + \tilde{b}_{r+j}, \qquad i = 1, \dots, r, \; j = 1, \dots, s \qquad (***)$$

$$a_i'^T \tilde{x} \le \tilde{b}_i, \quad i = r+s+1, \dots, m$$

Das neue System hat $r \cdot s + m - (r+s)$ Ungleichungen und $n-1$ Variablen.

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$

Finde: $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \leq b$ oder entscheide (mit mathematischer Sicherheit), dass es ein solches x nicht gibt.

Idee: Eliminiere Variable x_1, d.h. finde $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{\tilde{m} \times (n-1)}$, $\tilde{b} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$, so dass gilt: $\exists x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \iff \exists \tilde{x} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}} : \tilde{A}\tilde{x} \leq \tilde{b}$.

Dazu: Multipliziere Zeilen von $[A \mid b]$ mit positiven Konstanten, so dass das System $Ax \leq b$ nach Multiplikation und Umnummerierung der Zeilen folgende Gestalt bekommt

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1'^T \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_r'^T \\ -1 & a_{r+1}'^T \\ \vdots & \vdots \\ -1 & a_{r+s}'^T \\ 0 & a_{r+s+1}'^T \\ \vdots & \vdots \\ 0 & a_m'^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \end{bmatrix} \qquad (*)$$

mit $a_i'^T \in \mathbb{R}^{1 \times (n-1)}$.

(kann passieren: $r = 0$ oder $s = 0$)

Bem. a) (***) entspricht einer Projektion des Polyeders $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ entlang der x_1-Achse.

b) Lösung $\tilde{x}$ von (***) kann zu einer Lösung $(x_1, \tilde{x})$ von (*) erweitert werden: Dazu muss x_1 (**) erfüllen

c) Eliminiere nun sukzessive $x_2, x_3, \ldots,$ bis man bei x_n angekommen ist. Für x_n ist es klar, ob das finale System eine Lösung besitzt. Das finale System hat eine Lösung $\Longleftrightarrow$ Ursprungssystem (*) hat eine Lösung.

Satz 1 Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ein Polyeder und sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung.

Dann ist TP ein Polyeder.

Bew.: Falls T bijektiv, dann ist $TP = \{y \in \mathbb{R}^n : AT^{-1}y \leq b\}$ ein Polyeder. Argumentiere genauso, falls T injektiv ist. Falls $\ker T \neq \{0\}$, kann man oBdA. annehmen (Drehung), dass $T = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$. Verwende nun Bem. a). $\boxtimes$

Anwendung: Lösen von linearen Programmen

(LP) $\quad \max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n, Ax \le b\}$.

Führe zusätzliche Variable λ ein und betrachte das System linearer Ungleichungen

$$\begin{aligned} Ax &\le b \\ \lambda &\le c^T x \end{aligned}$$

Lösen von (LP) ist äquivalent zum Finden einer Lösung (x, λ) vom obigen System, wobei λ möglichst groß ist. Eliminiere $x_1, \dots, x_n$, so dass λ die letzte Variable ist. Wähle diese nun so groß wie möglich.

§ 3 Lemma von Farkas

Lösbarkeitskriterium für Systeme von linearen Ungleichungen.

Satz 1 (Farkas Lemma)
Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Dann gilt

$$\exists x \geq 0 : Ax = b \iff \nexists y \in \mathbb{R}^m \; A^T y \geq 0 \text{ und } b^T y < 0.$$