Bew.: „$\Rightarrow$": Ang. $\exists x \geq 0 : Ax = b$ und $\exists y \in \mathbb{R}^m : A^T y \geq 0$ und $b^T y < 0$. Dann

$$(A^T y)^T x = y^T A x = y^T b < 0$$

aber $\underbrace{(A^T y)^T}_{\geq 0} \underbrace{x}_{\geq 0} \geq 0$. Widerspruch.

„$\Leftarrow$": Ang. $\nexists x \geq 0 : Ax = b$. Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ die Spaltenvektoren von $A$. Nach Voraussetzung ist $b \notin \operatorname{cone}\{a_1, \dots, a_n\}$. Nach Satz 1.12 ist $\operatorname{cone}\{a_1, \dots, a_n\}$ eine abgeschlossene Menge. Also ist Satz IV.3.5 anwendbar und es gibt eine Trennhyperebene von $\{b\}$ und $\operatorname{cone}\{a_1, \dots, a_n\}$. D.h. $\exists y \neq 0 : y^T b < 0$ und $y^T x \geq 0$ für alle $x \in \operatorname{cone}\{a_1, \dots, a_n\}$. Somit $A^T y \geq 0$. $\boxtimes$

Interpretation: Das Lemma von Farkas ist ein Alternativsatz.

Entweder: $\exists x \geq 0 : Ax = b$

Oder: $\exists y : A^T y \geq 0,\ b^T y < 0$.

Korollar 2 (Variante)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$\exists\, x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \le b \iff \nexists\, y \ge 0 : \; A^T y = 0, \; b^T y < 0.$$

<u>Bew.</u>: Betrachte Matrix

$$A' = [\, A \mid -A \mid I_m \,] \in \mathbb{R}^{m \times (n+n+m)}$$

↑ $m \times m$ Einheitsmatrix

und $x' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+n+m}$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $x_3 \in \mathbb{R}^m$.

Situation von Satz 1:

$$\begin{aligned} \exists\, x' \ge 0 : A'x' = b &\iff \exists\, x_1, x_2, x_3 \ge 0 : \; Ax_1 - Ax_2 + x_3 = b \\ &\iff \exists\, x_1, x_2, x_3 \ge 0 : \; A(x_1 - x_2) + x_3 = b \\ &\iff \exists\, x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \le b. \end{aligned}$$

Wende Farkas Lemma (Satz 1) an:

$$\begin{aligned} \exists\, x' \ge 0 : A'x' = b &\iff \nexists\, y \in \mathbb{R}^m : \begin{bmatrix} A^T \\ -A^T \\ I_m^T \end{bmatrix} y \ge 0, \; b^T y < 0 \\ &\iff \nexists\, y \in \mathbb{R}^m : \; A^T y \ge 0, \; -A^T y \ge 0, \; y \ge 0, \\ &\qquad b^T y < 0 \\ &\iff \nexists\, y \in \mathbb{R}^m : \; A^T y = 0, \; y \ge 0, \; b^T y < 0. \end{aligned}$$

$\boxtimes$

# §4 Lineare Programmierung

<u>Def. 1</u> Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben.

Das <u>primale LP</u> ist

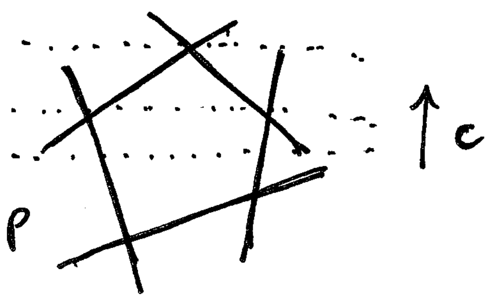
$$p^* = \sup \; c^T x \qquad \qquad (PLP)$$
$$x \in \mathbb{R}^n$$
$$Ax \leq b$$

und das <u>duale LP</u> ist

$$d^* = \inf \; b^T y \qquad \qquad (DLP)$$
$$y \in \mathbb{R}^m$$
$$y \geq 0$$
$$A^T y = c$$

<u>Bem.</u>: Def. 1 unterscheidet sich leicht von der Def. der konischen Programme.

<u>Geometrische Interpretation</u> von (PLP): Maximiere die lineare Fkt $x \mapsto c^T x$ über Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$.




D.h. schiebe zu $c$ orthogonale Hyperebenen so weit in Richtung $c$, dass sie $P$ gerade noch schneiden.

**Satz 2** Falls die Menge $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ der zulässigen Lösungen von (PLP) ein nicht-leeres, beschränktes Polyeder ist, dann gibt es eine Ecke $z$ von $P$, die eine optimale Lösung von (PLP) ist, d.h.

$c^T z \geq c^T x$ für alle $x \in P$.

**Bew.:** $\rightarrow$ Aufgabe 8.4

Offensichtlicher, aber evtl. langsamer Algorithmus zur Lösung von (PLP), falls $P$ beschränkt ist: Bestimme alle Ecken $x_1, \dots, x_t$ von $P$ und finde Index $j$ mit $c^T x_j \geq c^T x_i$, $i = 1, \dots, t$. **Problem:** $t$ kann sehr groß sein, z.B. beim Würfel: $C_n = \{x \in \mathbb{R}^n : -1 \leq x_i \leq 1,\ i = 1, \dots, n\}$.

$2n$ Ungleichungen, aber $2^n$ Ecken.

bessere Algorithmen: $\longrightarrow$ spätere Kapitel / Fourier-Motzkin (nur etwas besser).

**Satz 3** (Dualitätstheorie von linearen Programmen).
$\rightarrow$ vgl. Satz IV.3.8

a) (schwache Dualität)
$x$ zulässig für (PLP), $y$ zulässig für (DLP), dann