$c^T x \leq b^T y$. Insbesondere $p^* \leq d^*$.

b) (Komplementarität)

x optimal für (PLP), y optimal für (DLP). Dann

$(Ax-b)^T y = 0$. M.a.W. $y_j \neq 0 \Rightarrow (Ax-b)_j = 0$

$(Ax-b)_j \neq 0 \Rightarrow y_j = 0$

für $j = 1, \dots, m$

c) (Optimalitätsbedingung)

x zulässig für (PLP), y zulässig für (DLP) und $p^* = d^*$.

Dann sind x, y optimal $\Longleftrightarrow$ $(Ax-b)^T y = 0$.

d) (starke Dualität, von Neumann (1947))

Falls (PLP) und (DLP) beide zulässige Lösungen besitzen, dann gilt $p^* = d^*$ und es gibt optimale Lösungen x, y.

<u>Bew.:</u> <u>a) - c)</u>: $b^T y - c^T x \geq (Ax)^T y - (A^T y)^T x = 0$

weil $Ax \leq b$ und $y \geq 0$.

d) <u>$p^* \leq d^*$</u>. $\to$ a)

$p^* \geq d^*$: **1. Beh.:** $\exists x_0 : Ax_0 \leq b$ und $c^T x_0 = p^*$.

Bew.: Da (DLP) zulässig, folgt aus a): $p^* \leq +\infty$.

z.z.: $\exists x_0 : Ax \leq b$ und $c^T x_0 \geq p^*$. Ang.: $\nexists x_0$.

D.h. $\nexists x_0$: $\begin{bmatrix} A \\ -c^T \end{bmatrix} x_0 \leq \begin{bmatrix} b \\ -p^* \end{bmatrix}$. Nach Farkas Lemma (Korollar 3.2) gibt es ein $\begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} \geq 0$ mit

$$\left[A^T \mid -c\right] \begin{bmatrix} y \\ \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad b^T y - p^* \lambda < 0.$$

Dann

$$\lambda p^* = \sup\{\lambda c^T x : Ax \leq b\} = \sup\{(A^T y)^T x : Ax \leq b\}$$

$$\leq y^T b < \lambda p^*. \quad \lightning.$$

2. Beh.: $\exists y_0 \geq 0$: $A^T y_0 = c$, $b^T y_0 \leq p^*$.

(Weil $p^* \leq d^* \leq b^T y_0$ folgt dann die Beh.)

Bew.: Ang. $\nexists y_0$. Dann hat $\begin{bmatrix} A^T & 0 \\ b^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ p^* \end{bmatrix}$

keine Lösung mit $\begin{bmatrix} y_0 \\ \lambda \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Nach Farkas Lemma (Satz 3.1): $\exists \begin{pmatrix} z \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}$: $\begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \mu \end{bmatrix} \geq 0$

und $c^T z + p^* \mu < 0$.

1. Fall: $\mu = 0$.

Dann $Az \geq 0$ und $c^T z < 0$. Nach Vor. hat $Ax \leq b$ eine Lösung x_0. Für großes τ ist

$$A(x_0 - \tau z) \leq b \quad \text{und} \quad c^T(x_0 - \tau z) > p^*. \quad ↯.$$

2. Fall: $\mu > 0$

Dann $Az + \mu b \geq 0, \quad c^T z + p^* \mu < 0$. Also

$$A\left(\frac{-z}{\mu}\right) \leq b \quad \text{und} \quad c^T\left(\frac{-z}{\mu}\right) > p^*. \quad ↯. \qquad \boxtimes$$

Korollar 4 $\max\{c^T x : x \geq 0,\ Ax = b\}$

$= \min\{b^T y : A^T y - c \geq 0,\ y \in \mathbb{R}^m\}$,

falls beide Mengen gültiger Lösungen nicht-leer sind.

Bew.: Setze $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A \\ -A \\ -I \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{bmatrix}$. Dann

$$\max\{c^T x : x \geq 0,\ Ax = b\} = \max\{c^T x : \tilde{A}x \leq \tilde{b}\}$$

$$= \min\{\tilde{b}^T z : z \geq 0,\ \tilde{A}^T z = c\} \underset{z = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}}{=} \min\{b^T u - b^T v : u, v, w \geq 0,\ A^T u - A^T v - w = c\}$$

$$\overset{y = u - v}{=} \min\{b^T y : A^T y \geq c\}. \quad \boxtimes$$

Kapitel 6 Ganzzahlige lineare Optimierung und vollständig unimodulare Matrizen.

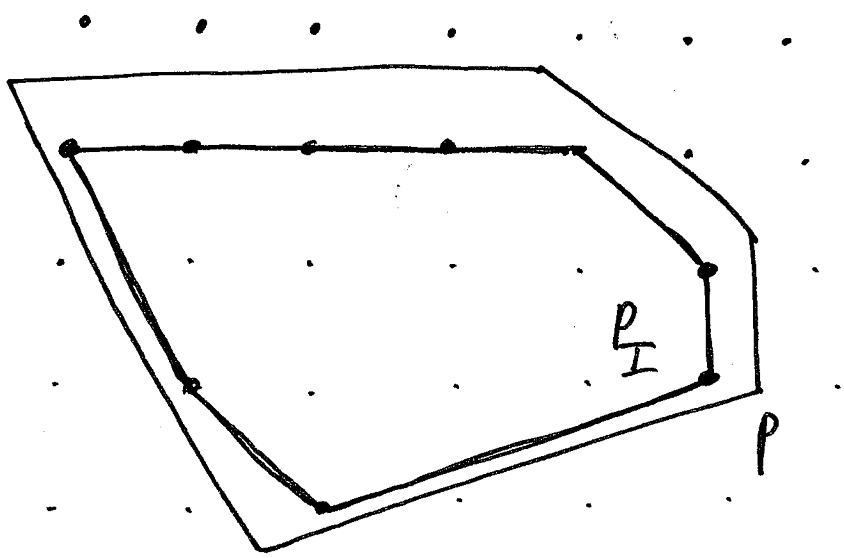
§ 1 Ganzzahlige lineare Programme

Def. 1 Ein ganzzahliges lineares Programm (ILP = IP = integer linear program) ist von der Form

$$\max\ c^T x$$
$$x \in \mathbb{Z}^n \qquad (x \text{ ganzzahlig})$$
$$Ax \le b$$

Geometrisch: Maximiere lineare Fkt. $x \mapsto c^T x$ über die ganzzahligen Punkte im Polyeder:

$$\mathbb{Z}^n \cap P, \quad P = \{x : Ax \le b\}.$$



$$P_I = \operatorname{conv}(\mathbb{Z}^n \cap P).$$

<u>Bsp. 2</u> $G = (V, E)$ ungerichteter Graph

Die <u>Inzidenzmatrix</u> $A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ ist definiert als

$$A_{v,e} = \begin{cases} 1, & \text{falls } v \in e \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist die Matchingzahl von G gegeben durch ein ILP:

$$\nu(G) = \max\{|M| : M \subseteq E \text{ Matching in } G\}$$

$$= \max\Big\{\sum_{e \in E} x_e : \begin{array}{ll} x_e \in \mathbb{Z} & \forall e \in E \\ x_e \geq 0 & \forall e \in E \\ \sum_{e : e \ni v} x_e \leq 1 & \forall v \in V \end{array}\Big\}$$

$$= \max\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^T x : x \in \mathbb{Z}^E, \; x \geq 0, \; Ax \leq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

<u>Def. 3</u> Ein Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>ganzzahlig</u>, falls für alle $c \in \mathbb{R}^n$, für die $\sup\{c^T x : x \in P\}$ endlich ist, das Maximum an einem ganzzahligen Vektor angenommen wird.