<u>Klar:</u> Falls P ganzzahlig ist und $\sup\{c^T x : x \in P\}$
$\neq \pm\infty$, dann ist

$$\max\{c^T x : x \in \mathbb{Z}^n, Ax \leq b\} = \max\{c^T x : Ax \leq b\}.$$

D.h. die Ganzzahligkeitsbedingung kann weggelassen werden.

Passiert in seltenen, aber wichtigen Spezialfällen.
Im Allgemeinen kann $\max\{c^T x : Ax \leq b\}$ effizient, in polynomieller Zeit gelöst werden, $\max\{c^T x : x \in \mathbb{Z}^n, Ax \leq b\}$ dagegen höchstwahrscheinlich nicht.
($\longrightarrow$ äquivalent zum $P \neq NP$ Problem, \$1 000 000 für Lösung, Millenium-Problem)

§ 2 Vollständig unimodulare Matrizen

Def. 1 Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt <u>vollständig-unimodular</u> (VU), falls jeder ihrer Minoren (d.h. Determinanten quadratischer Teilmatrizen) gleich $0, -1$, oder gleich $+1$ ist.

Insbesondere ist jeder Eintrag $A_{ij} \in \{0, -1, +1\}$.

Satz 2 Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ VU, $b \in \mathbb{Z}^m$. Sei z eine Ecke des Polyeders $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$. Dann ist z ganzzahlig, d.h. $z \in \mathbb{Z}^n$.

Bew.: Die Teilmatrix A_z hat nach Satz V. 1.4 vollen Rang n. Also enthält A eine Teilmatrix A der Größe $n \times n$ vom Rang n. OBdA sei A' die obere linke Teilmatrix von A. Setze $b' = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$. Dann gilt $A'z = b'$. Nach der Cramerschen Regel ist

$z_i = \dfrac{\det A'_i}{\det A'}$, wobei A'_i aus A' hervorgeht, indem man die i-te Spalte durch den Vektor b' ersetzt. Da nach Voraussetzung $|\det A'| = 1$, und weil $A'_i \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ ist, folgt $z_i \in \mathbb{Z}$. ⊠

<u>Satz 3</u> Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ VU, $b \in \mathbb{Z}^m$. Dann ist das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ganzzahlig.

<u>Bew.</u>: Sei $c \in \mathbb{R}^n$, so dass $\sup\{c^T x : x \in P\}$ endlich ist. Sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax^* \leq b$ und $c^T x^* = \sup\{c^T x : x \in P\}$. Wähle $d', d'' \in \mathbb{Z}^n$ mit $d' \leq x^* \leq d''$. Dann ist $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b,\ d' \leq x \leq d''\}$ ein beschränktes Polyeder, also nach dem Theorem von Minkowski-Weyl ein Polytop. Nach Satz V.4.2 wird $\max\{c^T x : x \in Q\}$ an einer Ecke $\tilde{x}$ von Q angenommen. Insbesondere, da $x^* \in Q$ und $\tilde{x} \in P$ ist, gilt $c^T \tilde{x} = c^T x^*$. Nun ist $\tilde{x} \in \mathbb{Z}^n$, weil

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{bmatrix} A \\ -I \\ I \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b \\ -d' \\ d'' \end{bmatrix} \right\}$$

ist und weil $\begin{bmatrix} A \\ -I \\ I \end{bmatrix}$ VU ist und weil wir somit Satz 2 anwenden können. $\boxtimes$

<u>Korollar 4</u> Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ VU, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$. Dann haben die beiden linearen Programme

$$\max\{c^T x : Ax \leq b\} = \min\{b^T y : A^T y = c,\ y \geq 0\}$$

ganzzahlige Lösungen, falls die Optima endlich sind.

Bew.: Folgt aus Satz 3, weil die Matrix

$$\begin{bmatrix} A^T \\ -A^T \\ -I \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{(2n+m)\times m} \text{ VU ist. (Warum?)}$$

$\boxtimes$

§ 3 Vollständig unimodulare Matrizen und bipartite Graphen

Satz 1 Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Dann gilt: G ist bipartit $\iff$ Inzidenzmatrix $A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ von G ist VU.

Bew.: „$\Rightarrow$": Sei B eine $t \times t$ Teilmatrix von A.

Zeige: $\det B \in \{-1, 0, +1\}$ per Induktion nach t.

$t = 1$: ✓

$t > 1$: 1. Fall: B enthält eine Nullspalte.

Dann $\det B = 0$.

2. Fall: B enthält Spalte, die genau eine 1 enthält.

Dann ist

$$|\det B| = \left|\det \begin{bmatrix} 1 & b^T \\ 0 & B' \end{bmatrix}\right| \quad \text{mit } b \in \mathbb{R}^{t-1},\ B' \in \mathbb{R}^{(t-1)\times(t-1)}.$$

Nach I.V. ist $\det B' \in \{-1, 0, +1\}$, also auch $\det B \in \{-1, 0, +1\}$, weil $|\det B| = |\det B'|$.

<u>3. Fall</u>: Jede Spalte von B enthält genau zwei Einsen. Da G bipartit ist, kann man (nach evtl. Permutation der Zeilen) B als $B = \begin{bmatrix} B' \\ B'' \end{bmatrix}$ schreiben, wobei jede Spalte von B' und jede Spalte von B'' genau eine Eins enthält. Aufaddieren aller Zeilen von B' ergibt den Vektor $(1, \dots, 1)$, genauso wie das Aufaddieren aller Zeilen von B''. D. h. die Zeilen von B sind lin. abh.: $\det B = 0$.

<u>„$\Longleftarrow$"</u>: Sei A VU und ang. der Graph G ist nicht bipartit. Dann enthält G einen Kreis ungerader Länge mit Knoten $v_1, \dots, v_k$ und Kanten $e_1, \dots, e_k$. Die zugehörige Teilmatrix von A (mit Zeilen $v_1, \dots, v_k$ und Spalten $e_1, \dots, e_k$) ist von der Form: