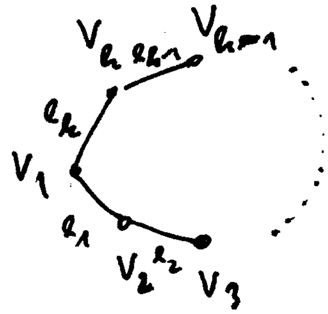
$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_{k-1} & e_k \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ v_k \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$



Entwickle die Determinante dieser Matrix nach der k-ten Spalte: Dann sieht man, daß die Determinante gleich $(+1)\cdot 1 + (+1)\cdot 1 = 2$ ist (k ungerade!). Also ist A nicht VU. $\boxtimes$

<u>Korollar 2</u> (Matching-Theorem von König, siehe Satz II.3.2)

Sei $G=(V,E)$ ein bipartiter Graph. Dann gilt $\nu(G)=\tau(G)$.

<u>Bew.:</u>

$$
\begin{aligned}
\nu(G) &= \max\{|M| : M\subseteq E \text{ Matching in } G\} \\
&= \max\Big\{\sum_{e\in E} x_e : x_e \geq 0\ \forall e\in E,\ x_e\in\mathbb{Z}, \\
&\qquad\qquad \sum_{e:\, e\ni v} x_e \leq 1\ \forall v\in V\Big\}
\end{aligned}
$$

$$= \max \{ \mathbb{1}^T x : x \in \mathbb{Z}^E,\ x \geq 0,\ Ax \leq \mathbb{1} \}$$

$$\overset{A \text{ VU, Satz 2.2}}{=} \max \{ \mathbb{1}^T x : x \in \mathbb{R}^E,\ x \geq 0,\ Ax \leq \mathbb{1} \} .$$

$$\overset{\text{LP Dualität}}{=} \min \{ \mathbb{1}^T y : y \in \mathbb{R}^V,\ y \geq 0,\ A^T y \geq \mathbb{1} \}$$

$$\overset{A^T \text{ VU, Satz 2.2}}{=} \min \{ \mathbb{1}^T y : y \in \mathbb{Z}^V,\ y \geq 0,\ A^T y \geq \mathbb{1} \}$$

$$= \min \Big\{ \sum_{v \in V} y_v : y_v \in \mathbb{Z},\ y_v \geq 0 \ \forall v \in V,\ y_u + y_v \geq 1 \ \forall \{u,v\} \in E \Big\}$$

$$= \tau(G)$$

$\uparrow$ $y \in \mathbb{Z}^V$, Minimum wird an einem Vektor angenommen, der nur 0/1 - Komponenten enthält.

Dann ist $y_v = 1 \iff v$ ist Knoten in einer minimalen Knotenüberdeckung. $\boxtimes$

<u>Def. 3</u> Sei $G = (V, E)$. Das <u>Matchingpolytop</u> von G ist die konvexe Hülle der charakteristischen Vektoren von Matchings in G:

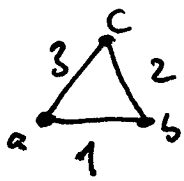
$$M(G) = \operatorname{conv} \{ \chi^M : M \subseteq E \text{ Matching in } G \} \subseteq \mathbb{R}^E .$$

Korollar 4 Sei $G=(V,E)$ bipartit. Dann ist

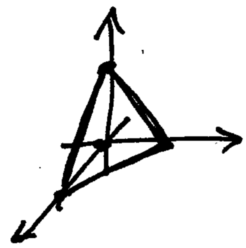
$$M(G) = \{ x \in \mathbb{R}^E : \ x \geq 0, \ Ax \leq 1 \},$$ wobei A die Inzidenzmatrix von G ist.

Bew.: „$\subseteq$": ✓

„$\supseteq$": Die rechte Seite $Q = \{ x : x \geq 0, Ax \leq 1 \}$ ist beschränkt. Also nach Minkowski-Weyl ein Polytop. Somit ist Q die konvexe Hülle seiner Ecken. Da A VU ist, sind nach Satz 2.2 alle Ecken von Q ganzzahlig. Jeder ganzzahlige Vektor in Q ist charakteristischer Vektor eines Matchings in G. ⊠

Bsp. 5 $G =$ 

$$M(G) = \operatorname{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



aber

$$\{ x \in \mathbb{R}^E : \ x \geq 0, \ Ax \leq 1 \}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \ x \geq 0, \ \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} x \leq 1 \right\} \ni \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Korollar 6 (Theorem von Egerváry (1931))

Sei $G=(V,E)$ bipartit und $w: E \to \mathbb{Z}$ eine ganzzahlige Gewichtsfkt. Dann gilt

$$\nu_w(G) = \min\Big\{ \sum_{v\in V} y_v : y \in \mathbb{Z}^V,\ y \geq 0,\ y_u + y_v \geq w(\{u,v\}),\ \{u,v\}\in E \Big\}$$

Bew.: Weil $A \in \mathbb{R}^{V\times E}$ Inzidenzmatrix von G VU ist, gilt

$$\begin{aligned}
&\max\{ w^T x : x \in \mathbb{Z}^E,\ x \geq 0,\ Ax \leq 1 \} \\
= &\max\{ w^T x : x \in \mathbb{R}^E,\ x \geq 0,\ Ax \leq 1 \} \\
= &\min\{ 1^T y : y \in \mathbb{R}^E,\ y \geq 0,\ A^T y \geq w \} \\
= &\min\{ 1^T y : y \in \mathbb{Z}^E,\ y \geq 0,\ A^T y \geq w \}.
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

§4 Vollständig unimodulare Matrizen und gerichtete Graphen

Def. 1 Es sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph. Die Inzidenzmatrix $M \in \mathbb{R}^{V \times A}$ von D ist definiert als

$$M_{v,a} = \begin{cases} +1, & \text{falls } a \in \delta^{in}(v) \qquad \longrightarrow\!\bullet\, v \\ -1, & \text{falls } a \in \delta^{out}(v) \qquad v\,\bullet\!\longrightarrow \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Jede Spalte von M enthält genau eine $+1$ und genau eine -1.

Satz 2 Die Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen ist VU.

Bew.: Sei $B \in \mathbb{R}^{t \times t}$ eine Teilmatrix von M. Zeige nun, per Induktion nach t, dass $\det B \in \{-1, 0, 1\}$.

$t = 1$: ✓

$t > 1$: 1. Fall: B hat eine Nullspalte

Dann $\det B = 0$.

2. Fall: B hat eine Spalte, die genau ein Element $\neq 0$ enthält.

Dann ist $|\det B| = \det \left| \begin{bmatrix} 1 & b^T \\ 0 & B' \end{bmatrix} \right| = |\det B'| \overset{\text{I.V.}}{\in} \{-1, 0, 1\}$

wobei $b \in \mathbb{R}^{t-1}$, $B' \in \mathbb{R}^{(t-1) \times (t-1)}$.

<u>3. Fall:</u> Jede Spalte von B enthält genau zwei Elemente $\neq 0$. Dann ergibt das Aufaddieren sämtlicher Zeilen von B den Nullvektor. D.h. $\det B = 0$. $\boxtimes$