3. Fall: Jede Spalte von B enthält genau zwei Elemente $\neq 0$. Dann ergibt das Aufaddieren sämtlicher Zeilen von B den Nullvektor. D.h. $\det B = 0$. $\boxtimes$

Korollar 2 (Max-flow-Min-cut, vgl. Kapitel III, Satz III.1.4)

Sei $D = (V,A)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V$, $c: A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben. Dann gilt

$$\max\{\text{value}(f) : f : A \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ f \text{ s-t-Fluss},\ f \leq c\}$$
$$= \min\{c(\delta^{out}(U)) : U \subseteq V,\ s \in U,\ t \notin U\}.$$

Falls $c: A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dann $\exists\, f: A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit value$(f) =$ max.

Bew.: Sei $M \in \mathbb{R}^{V \times A}$ die Inzidenzmatrix von D.
Sei M' die Matrix, die man durch Streichen der zu s und t gehörenden Zeilen aus M bekommt. Dann gilt $f \in \mathbb{R}^A$ ist s-t-Fluss $\Longleftrightarrow M'f = 0$.
Sei $w^T \in \mathbb{R}^A$ die zu t gehörende Zeile von M. Dann $w^T f = \text{value}(f)$.

Also:

$$\max\{\text{value}(f) : f : A \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ f \text{ s-t-Fluss},\ f \leq c\}$$

$$= \max\{w^T f : 0 \leq f \leq c,\ M' f = 0\}$$

LP Dualität

$$= \min\{y^T c : y \geq 0,\ z \in \mathbb{R}^{V \setminus \{s,t\}},\ y + (M')^T z \geq w\}$$

$$= \min\left\{y^T c : y \in \mathbb{R}^A,\ z \in \mathbb{R}^{V \setminus \{s,t\}},\ \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & (M')^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix}\right\}$$

Die Matrix $\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & (M')^T \end{bmatrix}$ ist nach Satz 2 VU und der Vektor $\begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix}$ ist ganzzahlig. Also wird nach Satz 2.3 das Minimum an ganzzahligen Vektoren y^*, z^* angenommen.

Erweitere z^* zu $z^* \in \mathbb{Z}^V$ durch $z_t^* = -1$ und $z_s^* = 0$.

Dann gilt $y^* + (M')^T z^* \geq 0$. (Nachprüfen!)

Definiere $U = \{v \in V : z_v^* \geq 0\}$. Dann $s \in U$, $t \notin U$.

<u>Beh.:</u> $c(\delta^{\text{out}}(U)) \leq (y^*)^T c$ $(= \max \text{value}(f))$.

<u>Bew.:</u> Genügt zu zeigen: Falls $a \in \delta^{\text{out}}(U)$, dann ist $y_a^* \geq 1$.

Für $a = (u,v) \in \delta^{out}(U)$ gilt

$$z_u^* \geq 0 \quad \text{und} \quad z_v^* \leq -1, \quad \text{weil } z^* \in \mathbb{Z}^V.$$

Wegen

$$[y^* + M^T z^*]_a \geq 0 \text{ gilt } y_a^* + z_v^* - z_u^* \geq 0.$$

D.h. $y_a^* \geq z_u^* - z_v^* \geq 1$.

Damit haben wir <u>max ≥ min</u> gezeigt. Die andere Ungleichung max ≤ min ist, wie oft, klar. ☒

<u>§5 Charakterisierung von VU Matrizen</u>

<u>Satz 1</u> (Hoffman, Kruskal, 1956)

Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Dann gilt:

A ist VU $\iff$ $\forall b \in \mathbb{Z}^m$: Das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, Ax \leq b\}$

ist ganzzahlig.

<u>Bew.</u>: <u>„$\Rightarrow$"</u>: Satz 2.3.

<u>„$\Leftarrow$"</u>: Sei A' eine reguläre $k \times k$-Teilmatrix von A.

Zu zeigen: $|\det A'| = 1$.

OBdA ist A' die obere linke Teilmatrix von A.

Betrachte die Matrix $B \in \mathbb{Z}^{m \times m}$, die aus den ersten k und letzten $m-k$ Spalten von $[A \ I_m] \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$ besteht:

$$
[A \ I_m] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} k & n-k & k & m-k \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|cc|c} A' & * & I_k & 0 \\ \hline * & * & 0 & I_{m-k} \end{array}\right] \begin{array}{c} k \\ m-k \end{array} \end{array}
$$

B besteht aus dem ersten und dem letzten Spaltenblock.

Dann gilt $|\det B| = |\det A'|$.

<u>Ziel:</u> Zeige $B^{-1} \in \mathbb{Z}^{m \times m}$

[Dann: $\det B^{-1} \in \mathbb{Z}$ & $\det B \cdot \det B^{-1} = 1$
$\Longrightarrow |\det B| = 1$].

Sei $i \in \{1, \ldots, m\}$. Zeige jetzt, dass die i-te Spalte von B^{-1} ganzzahlig ist. Wähle $y \in \mathbb{Z}^m$ mit $y + B^{-1} e_i \geq 0$ und setze $z = y + B^{-1} e_i$. Dann ist $Bz = By + e_i \in \mathbb{Z}^m$. Setze $b = Bz$. Sei $z' \in \mathbb{Z}^{n+m}$ der Vektor, der aus z wie folgt entsteht:

$$z'_j = z_j \quad \text{für } j = 1, \ldots, k$$
$$z'_{n-k+k+j} = z_{k+j}, \quad j = 1, \ldots, m-k$$
$$z'_j = 0 \quad \text{sonst.}$$

D.h. füge in z hinter den ersten k Komponenten $n-k+k$ Nullen ein. Dann gilt nach Konstruktion

$$[A \; I_m]\, z' = B z = b. \qquad (*)$$

Da $z' \geq 0$ ist, liegt der Vektor z'', der aus den ersten n Komponenten von z' besteht in $P = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$.
D.h. es gilt $\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} z'' \leq \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$. Die ersten k und die letzten $n-k$ dieser Ungleichungen sind mit Gleichheit erfüllt. Da die entsprechenden Zeilen von $\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}$ linear unabhängig sind, ist z'' eine Ecke von P. Nach Vor. ist $z'' \in \mathbb{Z}^n$.
Auf den ersten n Komponenten stimmen z' und z'' überein. Die letzten m Komponenten von z' sind ~~nach~~ $(*)$ $b - Az'' \in \mathbb{Z}^m$.
Somit ist $z \in \mathbb{Z}^m$ und auch die i-te Spalte von B^{-1}:

$$B^{-1} e_i = z - y \in \mathbb{Z}^m.$$

$\boxtimes$