Teil C – Algorithmen der linearen Optimierung

Ziel: Löse (LP) $p^* = \max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\}$

algorithmisch (und möglichst effizient)

Bislang dazu:
- Fourier Motzkin Eliminationsverfahren (Kapitel V.2)
- Aufzählen aller Ecken von $P = \{x : Ax \leq b\}$ ($\to$ Satz V.4.2)

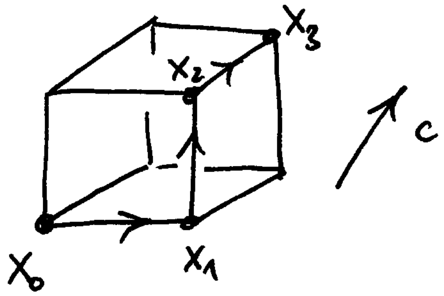
Hier:
- Simplexverfahren (Kapitel VII)
- Ellipsoidmethode (Kapitel VIII)
- Innere-Punkte-Verfahren ($\to$ Vorlesung „Konvexe Optimierung" (WS 2015/16).

Kapitel VII Das Simplexverfahren

Wissen (Satz V.4.2) Falls $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ein Polytop ist, dann wird das Maximum von (LP) an einer Ecke von P angenommen.

<u>Geometrische Idee</u>: Finde eine Sequenz von Ecken

$x_0, x_1, \dots, x_N \in P$, so dass $c^T x_0 \le c^T x_1 \le \dots \le c^T x_N = p^*$.



<u>Zunächst</u>: spezielle Annahme: P besitzt eine Ecke x_0,
die wir kennen.

<u>Später</u>: Beseitigung dieser speziellen Annahme.

<u>Simplexalgorithmus</u>

<u>Eingabe</u>: $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, x_0 Ecke von P

<u>Ausgabe</u>: Ecke x_N von P mit $c^T x_N = p^*$.

- Wähle $n \times n$-Teilsystem $A_0 x \le b_0$ von $Ax \le b$ mit $A_0 x_0 = b_0$ und rang $A_0 = n$.
- Bestimme $\mu \in \mathbb{R}^m$ mit $c = A^T \mu$ und $\mu_i = 0$, falls Zeile i von A nicht zu A_0 gehört.

  [Berechne $(A_0^{-1})^T c$ und füge Nullen an den entsprechenden Stellen hinzu.]

1. Fall $\mu \geq 0$.

Dann ist x_0 optimal, weil μ eine optimale Lösung des dualen LP. $\min b^T y$

$$y \geq 0$$
$$A^T y = c$$

ist:

$$c^T x_0 = (A^T u)^T x_0 = u^T A x_0 = \mu^T b \geq \min\{b^T y : y \geq 0, A^T y = c\}$$
$$\geq \max\{c^T x : Ax \leq b\}.$$

2. Fall $\mu \not\geq 0$.

Sei i der kleinste Index mit $\mu_i < 0$.

Wähle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $a^T y = 0 \quad \forall$ Zeilen a^T von A_0 mit $a^T \neq a_i^T$

$$a_i^T y = -1$$

[y ist die entsprechende Spalte von $-A_0^{-1}$.].

2a) $a^T y \leq 0 \quad \forall$ Zeilen a^T von A.

Dann ist $x_0 + \lambda y \in P \quad \forall \lambda \geq 0$.

Desweiteren $c^T(x_0 + \lambda y) = c^T x_0 + \lambda c^T y = c^T x_0 + \lambda \underbrace{u^T A y}_{= -u_i}$

$$= c^T x_0 - \lambda \underbrace{\mu_i}_{<0} \longrightarrow +\infty \text{ für } \lambda \to \infty$$

D.h. $p^* = +\infty$.

2b) $a^T y > 0$ für eine Zeile a^T von A.

Setze $\lambda_0 = \max\{\lambda : x_0 + \lambda y \in P\}$

$$= \min\left\{\frac{b_j - a_j^T x_0}{a_j^T y} : j = 1, \dots, m,\ a_j^T y > 0\right\}$$

Sei j der kleinste Index, an dem das Minimum angenommen wird.

Definiere A_1 = Matrix, die man aus A_0 erhält, wenn man Zeile a_i^T durch Zeile a_j^T austauscht.

$$x_1 = x_0 + \lambda y.$$

$$b_1 = A_1 x_1.$$

Nun gehe zum Anfang mit A_1, x_1, b_1 anstatt von A_0, x_0, b_0.

Wiederhole bis entweder $u \geq 0$ oder $p^* = +\infty$. $\boxtimes$

Satz 1 Der Simplexalgorithmus terminiert nach ~~endlich~~ endlich vielen Schritten.

Bew.: Bezeichne die Variablen im k-ten Schritt mit $A_k, x_k, u_k, y_k, \lambda_{0,k}$.

Es gilt

$$c^T x_0 \leq c^T x_1 \leq \dots \quad \text{und} \quad c^T x_k = c^T x_{k+1} \iff x_k = x_{k+1},$$

weil

$$c^T x_{k+1} = c^T (x_k + \lambda_{0,k} y_k) \quad \text{mit } \lambda_{0,k} \geq 0$$

und

$$c^T y_k = (-\mu_k)_i > 0,$$

da

$$c^T y_k = \mu_k^T A y_k = (-\mu_k)_i.$$

Angenommen der Algorithmus landet in einer Endlosschleife. Dann $\exists\, k, l$, $k < l$ mit $A_k = A_l$, weil es nur endlich viel verschiedene Teilmatrizen von A gibt. Dann $c^T x_k = c^T x_l$, also $x_k = x_{k+1} = \dots = x_l$.

Sei r der größte Index, so dass Zeile a_r^T in einer Iteration aus A_t genommen wird, wobei $t = k, k+1, \dots, l$. Dies passiere in Schritt p. Weil $A_k = A_l$, gibt es ein q, so dass a_r^T wieder in A_q aufgenommen wird. Dann

$$k \leq p < q < l.$$

Dann gilt für $j > r$:

a_j^T kommt in A_p vor $\Longleftrightarrow$ a_j^T kommt in A_q vor. (*)

Es gilt $\mu_p^T A y_q = c^T y_q > 0$. Also gibt es ein j mit $(\mu_p)_j (a_j^T y_q) > 0$.

<u>Aber:</u> <u>1. Fall:</u> a_j^T gehört nicht zu A_p: $(\mu_p)_j = 0$ ↯

<u>2. Fall:</u> a_j^T gehört zu A_p

a) <u>$j > r$:</u> Dann $a_j^T y_q = 0$ ↯

wegen (*).

b) <u>$j = r$:</u> Dann $(\mu_p)_j < 0$ und $a_j^T y_q > 0$ ↯

c) <u>$j < r$:</u> Dann $(\mu_p)_j \geq 0$ und $a_j^T y_q \leq 0$ ↯.

$\boxtimes$