<u>Jetzt</u>: Wie startet man den Simplexalgorithmus, wenn man keine Ecke x_0 kennt?

<u>OBdA</u>: (LP) ist von der Form

$$\max\{c^T x : x \geq 0, Ax \leq b\}.$$

($\rightarrow$ Aufgabe 10.2: Dann besitzt $P = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, Ax \leq b\}$ eine Ecke)

<u>Idee</u>: Um Ecke von P zu finden, füge Extravariablen hinzu und stelle ein neues LP auf, dass eine offensichtliche Ecke besitzt und dessen optimale Lösung eine Ecke von P liefert.

<u>Extravariable</u>: $y \in \mathbb{R}^m$, $y \geq 0$

<u>Neues LP</u>: $\min e^T y$ mit $e = [1, \dots, 1]^T$

$$\begin{bmatrix} A & -I_m \\ -I_n & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

<u>offensichtliche Ecke</u>: $x = 0$,

$$y_j = \begin{cases} 0, & \text{falls } b_j \geq 0 \\ -b_j, & \text{falls } b_j < 0. \end{cases}, \quad j = 1, \dots, m$$

Dann ist $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ eine Ecke von

$$P' = \{ (x,y) : \; Ax - y \leq b, \; x \geq 0, \; y \geq 0 \},$$

weil $(x,y) \in P'$ und $\operatorname{rang} \begin{bmatrix} A & -I \\ -I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}_{(x,y)} = n+m$.

Jetzt kann man den Simplexalgorithmus mit der Startecke (x,y) verwenden, um das neue LP zu lösen. Sei (x^*, y^*) die Ecke von P', die der Algorithmus liefert.

1. Fall $\quad e^T y^* > 0$.

Dann ist das Original-LP ungültig:

$\nexists\, x \geq 0 : Ax \leq b$, da $\exists j : y^*_j > 0$ und $[Ax - y^*]_j \leq b_j$.

2. Fall $\quad e^T y^* = 0$

Dann $y^* = 0$ und x^* ist eine Ecke von P, weil

$x^* \in P$ und $\operatorname{rang} \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}_{x^*} = n$.

Zur praktischen und theoretischen Effizienz des Simplex-algorithmus

+ sehr schnell bei vielen praxisrelevanten Eingaben
+ sehr gute Implementationen erhältlich (CPLEX, gurobi)
- Klee-Minty-Würfel (1972): Beispiel, dass der Algo. exponentiell viele Schritte im worst case benötigt.
+ Spielman-Teng (2004): „smoothed analysis"
  Algo. ist polynomiell, falls Eingabe leicht, zufällig „gestört" ist.

o offenes Problem („polynomielle Hirsch-Vermutung"):
  Ist der maximale Abstand zwischen zwei Ecken polynomiell in n, m?

Kapitel VIII Die Ellipsoidmethode

§ 1 Grundlegendes zu Ellipsoiden

<u>Def 1.</u> Eine positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ definieren das <u>Ellipsoid</u>

$$\mathcal{E}(A, x) = \{ y \in \mathbb{R}^n : (y-x)^T A^{-1} (y-x) \leq 1 \}.$$

<u>Bsp 2.</u> $\mathcal{E}(r^2 I_n, 0) = r B_n$, $B_n = \{ y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq 1 \}$

n-dim. Einheitskugel

<u>Eigenschaften:</u>

Hauptachsentransformation / Spektralzerlegung

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^T,$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ die Eigenwerte von A und $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ Orthonormalbasis bestehend aus zugehörenden Eigenvektoren

u_i : Hauptachsenrichtung

$2\sqrt{\lambda_i}$: Länge der Hauptachse