MC-FRAGEN

Beantworte die folgenden Fragen mit „Richtig“ oder „Falsch“.

1. Kürzeste Wege

Es sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph mit Kantenlängenfunktion $l\colon A \to \mathbb{R}$ und seien $s, t \in V$ zwei Knoten.

(1) Ein Weg P von s nach t ist eine Abfolge von Knoten und Kanten, die mit s beginnt und mit t endet.
Nein. Ein Weg besucht jeden Knoten höchstens einmal.

(2) Jeder Weg ist auch eine Kantenfolge.
Ja.

(3) Jede Kantenfolge ist auch ein Weg.
Nein. Kantenfolgen können Knoten auch doppelt besuchen.

(4) Bezüglich der Kantenlängenfunktion l gibt es immer eine kürzeste s-t-Kantenfolge.
Nein. Falls es einen Kreis negativer Länge gibt, des von s aus erreichbar ist, könnte man diesen beliebig oft durchlaufen.

(5) Bezüglich der Kantenlängenfunktion l gibt es immer einen kürzesten s-t-Weg.
Nein, denn t muss nicht von s aus erreichbar sein. Falls aber t von s aus erreichbar ist, gilt die Aussage.

(6) Ein Potential p ist eine Abbildung $p\colon V \to \mathbb{R}$, sodass für jede Kante $a = (v, w)$ gilt, dass $p(w) - p(v) \geq l(a)$.
Nein, das Ungleichungszeichen ist falsch rum.

(7) Es gibt immer ein Potential.
Nein. Es gibt ein Potential genau dann, wenn es keine Kreise negativer Länge gibt.

(8) Es gilt

$$\min\{l(P) : P \text{ ist } s\text{-}t\text{-Weg }\} = \max\{p(t) - p(s) : P \text{ ist Potential}\}.$$

Nein. Im Allgemeinen gilt „$\geq$“. Gleichheit gilt, falls beide Mengen gültiger Lösungen nicht leer sind, also falls t von s aus erreichbar ist und falls es ein Potential gibt (also keine negativen Kreise).

2. Matchings in bipartiten Graphen

Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter bipartiter Graph.

(1) Es gibt $U, W \subseteq V$, sodass $V = U \cup W$ mit $U \cap W = \emptyset$ und je zwei Knoten aus U sind nicht benachbart und je zwei Knoten aus W sind nicht benachbart.
Ja.

(2) Ein Matching $M \subseteq E$ ist eine Menge von Kanten, die alle Knoten in V überdecken.
Nein. Das ist die Beschreibung für eine Kantenüberdeckung. Ein Matching

ist eine Menge von Kanten, die paarweise keine gemeinsamen Knoten enthalten.

(3) Jeder ungerichtete Graph besitzt ein Matching.
Ja. Zum Beispiel die leere Menge ist ein Matching für jeden ungerichteten Graphen.

(4) Ein Matching $M \subseteq E$ heißt perfekt, falls es für jeden Knoten $v \in V$ eine Kante $e \in M$ gibt mit $v \in e$.
Ja.

(5) Jeder ungerichtete Graph besitzt ein perfektes Matching.
Nein. Ein perfektes Matching kann nur existieren, falls die Anzahl der Knoten gerade ist. Aber auch das ist noch keine hinreichende Bedingung.

(6) Sei $M \subseteq E$ ein Matching in G. In einem M-augmentierenden Weg P sind beide Endknoten nicht von M überdeckt und P besteht abwechselnd aus Kanten nicht in M und Kanten in M.
Ja.

(7) M ist ein maximales Matching $\Leftrightarrow$ Es gibt einen M-augmentierenden Weg.
Nein. Es ist genau umgekehrt: M ist ein maximales Matching genau dann, wenn es keinen M-augmentierenden Weg gibt.

(8) Es sei $M \subseteq E$ ein Matching und P ein M-augmentierender Weg. Die symmetrische Differenz $M \triangle P$ ist wieder ein Matching mit $|M \triangle P| = |M| + 1$.
Ja.

(9) Ein M-augmentierender Weg kann aus einer einzelnen Kante bestehen.
Ja.

(10) Eine Knotenüberdeckung $C \subseteq V$ ist eine Menge von Knoten, die paarweise nicht benachbart sind.
Nein. Das ist die Beschreibung für eine unabhängige Menge. Eine Knotenüberdeckung $C \subseteq V$ ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante von einem dieser Knoten aus C überdeckt ist, das heißt für alle $e \in E$ gibt es ein $v \in C$ mit $v \in e$.

(11) Es gilt

$$\max\{|M| : M \text{ ist Matching}\} = \min\{|C| : C \text{ ist Knotenüberdeckung}\}.$$

Ja.

(12) Der obige Satz heißt Satz von König und ist wichtig für die Klausur.
Ja :)

(13) Der Satz von König gilt auch in allgemeinen (nicht bipartiten) Graphen.
Nein. Allgemein gilt nur „$\leq$“. Zum Beispiel in einem Kreis mit 3 Knoten besitzt ein Matching maximal eine Kante, aber eine Knotenüberdeckung muss mindestens zwei Knoten enthalten.

(14) Mit dem Satz von König lässt sich der Satz von Hall beweisen.
Ja.

(15) Mit dem Satz von Hall lässt sich der Satz von König beweisen.
Ja.

(16) M heißt Matching mit maximalem Gewicht, falls M die maximale Anzahl von Kanten besitzt und unter allen Matchings mit maximaler Kantenanzahl das größte Gewicht besitzt.
Nein. Die Anzahl der Kanten ist nicht entscheidend, sondern M muss unter allen Matchings dasjenige mit maximalem Gewicht sein. Es kann sein, dass unter allen Matchings mit maximaler Kantenanzahl keines mit maximalem

Gewicht ist. Zum Beispiel wenn alle Kantengewichte negativ sind, ist die leere Menge das Matching mit maximalem Gewicht.

(17) M heißt extremes Matching, falls M unter allen Matchings mit gleicher Kantenanzahl wie M das größte Gewicht besitzt.
Ja.

3. Flüsse in Netzwerken

Es sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph mit Kapazitätsfunktion $c\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und seien $s, t \in V$ zwei Knoten.

(1) Ein s-t-Fluss, der durch c beschränkt ist, ist eine Abbildung $f\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(a) \leq c(a)$ für alle $a \in A$, die das Flusserhaltungsgesetz erfüllt:

$$\text{Für alle } v \in V \text{ gilt } \sum_{a \in \delta^{\text{in}}(v)} f(a) = \sum_{a \in \delta^{\text{out}}(v)} f(a).$$

Nein. Das wäre die Beschreibung für einen Fluss mit Wert 0. Ein Fluss muss nur in allen Knoten außer s und t die Flusserhaltung erfüllen.

(2) Der Wert eines s-t-Flusses f ist

$$\text{value}(f) = \sum_{a \in \delta^{\text{out}}(s)} f(a) - \sum_{a \in \delta^{\text{in}}(t)} f(a).$$

Nein. Ein Index ist falsch. Der Wert eines Flusses ist alles was aus s rausfließt abzüglich alles was in s reinfließt. Also

$$\text{value}(f) = \sum_{a \in \delta^{\text{out}}(s)} f(a) - \sum_{a \in \delta^{\text{in}}(s)} f(a).$$

(3) Es sei $U \subseteq V$ mit $s \in U$, $t \notin U$. Der von U induzierte s-t-Schnitt ist definiert als

$$\delta^{\text{out}}(U) = \{(u, w) \in A : u \in U,\ w \notin U\}.$$

Ja.

(4) Ein s-t-Schnitt ist eine Knotenmenge.
Nein!! Häufiger Irrtum. Ein s-t-Schnitt wird oft über eine Knotenmenge definiert, ist aber eine Kantenmenge.

(5) Blödsinn. Das wird zwar häufig verwechselt, aber ein s-t-Schnitt ist in Wirklichkeit eine Kantenmenge.
Ja.

(6) Es sei $\delta^{\text{out}}(U)$ ein s-t-Schnitt. In dem Graphen $(V, A \setminus \delta^{\text{out}}(U))$ gibt es keinen gerichteten Weg mehr von s nach t.
Ja. Wie der Name schon sagt, wenn man alle Kanten eines s-t-Schnittes „abschneidet“, gibt es keinen gerichteten Weg mehr von s nach t.

(7) Es gilt

$$\max\{\text{value}(f) : f \text{ ist } s\text{-}t\text{-Fluss}\} = \min\{c(\delta^{\text{out}}(U)) : U \subseteq V, s \in U, t \notin U\}.$$

Ja. Das ist das Max-Flow-Min-Cut Theorem.

4. Polyedertheorie

(1) Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, falls

$$\forall x_1, \dots, x_N \in A \, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_N \geq 0 \text{ ist } \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i \in A.$$

Nein. Es müsste zusätzlich noch $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$ sein.

(2) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, falls für je zwei Punkte $x, y \in A$ auch die Verbindungsstrecke $[x, y] = \{\alpha x + (1 - \alpha)y : \alpha \in [0, 1]\}$ in A enthalten ist.
Ja.

(3) Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die konvexe Hülle von A gleich

$$\mathrm{conv}(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathbb{N}, \exists x_1, \dots, x_N \in A, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_N \geq 0 \text{ mit } \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1 \text{ sodass } y = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i\}.$$

Ja.

(4) Die konvexe Hülle von $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die größte konvexe Menge, die A enthält.
Nein. $\mathrm{conv}(A)$ ist die kleinste konvexe Menge, die A enthält.

(5) Ein Polytop ist die konvexe Hülle von beliebig vielen Punkten.
Nein. Ein Polytop ist die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten.

(6) Eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge der Form

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = \delta\}$$

für ein $c \in \mathbb{R}^n$ und ein $\delta \in \mathbb{R}$.
Nein. Man braucht noch, dass $c \neq 0$ ist.

(7) Eine Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = \delta\}$ trennt den $\mathbb{R}^n$ in zwei Halbräume H^+ und H^-, wobei

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \geq \delta\} \text{ und } H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \leq \delta\}.$$

Ja.

(8) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, abgeschlossen und nicht leer und sei $z \notin C$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt $\pi_C(z) \in C$, sodass $\|\pi_C(z) - z\| = \inf\{\|x - z\| : x \in C\}$.
Ja.

(9) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, abgeschlossen und nicht leer und sei $z \notin C$. Dann gibt es eine Trennhyperebene H von C und z, d.h. $C \subseteq H^-$ und $z \in H^+$.
Ja.

(10) Mit der Notation wie bei den letzten beiden Fragen ist

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : (z - \pi_C(z))^T x = (z - \pi_C(z))^T \pi_C(z)\}$$

eine Stützhyperebene an C mit $C \subseteq H^-$ und $z \in H^+$.
Ja.

(11) Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Kegel, falls für alle $x, y \in K$ und für alle $\lambda \in [0, 1]$ auch $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$ ist.
Nein. Damit K ein Kegel ist, muss für alle $x, y \in K$ und für alle $\lambda, \mu \geq 0$ auch $\lambda x + \mu y \in K$ sein.

(12) Jeder nichtleere Kegel enthält 0.
Ja. Für $x \in K$ ist nach der Definition (die aus dem Skript, nicht die äquivalente Definition von der letzten Frage) eines Kegels auch $\lambda x \in K$ für alle $\lambda \geq 0$. Also ist auch $0 \cdot x = 0 \in K$.

(13) Jede Stützhyperebene an einen nichtleeren Kegel enthält 0.
Ja. Intuitiv logisch, ein Beweis folgt in der anderen Sonderübung.

(14) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kegel. Der duale Kegel von K ist definiert durch

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n : x^T y \leq 1 \; \forall x \in K\}.$$

Nein. Es ist $K^* = \{y \in \mathbb{R}^n : x^T y \geq 0 \; \forall x \in K\}$. (In den Vorlesungsnotizen steht $\forall x \in \mathbb{R}^n$, das ist falsch).

(15) Ein ordentlicher Kegel ist spitz, abgeschlossen und nichtleer.
Nein. Ein ordentlicher Kegel ist spitz, abgeschlossen und volldimensional.

(16) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Ein Punkt $z \in C$ heißt Extrempunkt von C, falls es $x, y \in C$ und $\alpha \in (0,1)$ gibt mit $z = \alpha x + (1-\alpha)y$.
Nein. Ein Punkt $z \in C$ heißt Extrempunkt von C, falls er auf keiner echten Verbindungsstrecke zweier anderer Punkte aus C liegt, das heißt falls aus $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ mit $x, y \in C$ und $\alpha \in (0,1)$ stets $x = z = y$ folgt.

(17) Ein Polyeder ist der Schnitt von beliebig vielen Halbräumen.
Nein. Ein Polyeder ist der Schnitt von endlich vielen Halbräumen.

(18) Ein Polyeder P ist die Lösungsmenge eines endlichen Systems von linearen Ungleichungen, d.h es gibt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ sodass $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$.
Ja.

(19) Extrempunkte von Polyedern heißen Ecken.
Ja.

(20) Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ein Polyeder. Ein Punkt $z \in P$ ist eine Ecke von P genau dann, wenn z midestens n viele Ungleichungen von $Ax \leq b$ mit Gleichheit erfüllt.
Nein. $z \in P$ ist eine Ecke von P genau dann, wenn die Teilmatrix A_z von A, die aus den Zeilen a_i^T von A besteht, die $a_i^T z = b_i$ erfüllen, Rang n hat.

(21) Jedes Polyeder ist ein Polytop.
Nein. Ein unbeschränktes Polyeder ist kein Polytop.

(22) Jedes Polytop ist ein Polyeder.
Ja.

(23) Jedes Polytop ist beschränkt.
Ja.

(24) Jedes Polyeder ist beschränkt.
Nein.

(25) Ein beschränktes Polyeder ist ein Polytop.
Ja. Satz von Minkowski.

(26) Ein Polytop ist ein beschränktes Polyeder.
Ja. Satz von Weyl.

(27) Die beiden letzten Aussagen sind bekannt als Sätze von Minkowski und Weyl und man hat sie auf fast jedem Übungsblatt benutzen müssen. Also sollte man sie unbedingt für die Klausur lernen.
Auf jeden Fall.

(28) Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gilt immer genau eine der beiden Aussagen:
  (a) Es gibt ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \leq b$.
  (b) Es gibt ein $y \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}$ mit $y^T A = 0$ und $b^T y < 0$.

Ja. Lemma von Farkas.

(29) Es sei $p^* = \max\{c^T x : Ax \leq b\}$ ein primales lineares Programm. Dann ist das duale lineare Programm gegeben durch

$$d^* = \min\{y^T b : y \geq 0, y^T A = c^T\}.$$

Ja. Das sind primales und duales lineares Programm in Standardform.

(30) Es gilt immer $p^* \leq d^*$.
Ja. Schwach Dualität.

(31) Es gilt immer $p^* = d^*$.
Nein. Starke Dualität gilt nur, falls beide Mengen gültiger Lösungen nicht leer sind.

(32) Es gilt immer $p^* \geq d^*$.
Nein.

(33) Es gilt $p^* = d^*$, falls beide Mengen gültiger Lösungen nicht leer sind.
Ja. Starke Dualität.

(34) Das Maximum $\max\{c^T x : Ax \leq b\}$ wird an einer Ecke des Polyeders $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ angenommen.
Nein. So eine Aussage kann man nur treffen, falls P beschränkt ist. Ein Beispiel im $\mathbb{R}^2$ ist

$$\max\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^T x : \begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}.$$

Das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$ hat gar keine Ecken, trotzdem ist das Maximum endlich (z. B. Skizze machen).

(35) Das Maximum $\max\{c^T x : Ax \leq b\}$ wird an einer Ecke des Polyeders $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ angenommen, falls P beschränkt ist.
Ja. Ein beschränktes Polyeder ist ein Polytop und für Polytope gilt die Aussage.

(36) Mit dem Verfahren von Fourier und Motzkin kann man feststellen, ob ein System von linearen Ungleichungen lösbar ist.
Ja.

(37) Ein lineares Ungleichungssystem kann man genau wie ein lineares Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus lösen.
Nein. Siehe nächste Frage.

(38) Man muss aufpassen. Man darf lineare Ungleichungen nur addieren und mit positiven Skalaren multiplizieren. Beim Subtrahieren ändert sich im Allgemeinen die Lösungsmenge.
Ja. Subtrahiert man eine lineare Ungleichung von einer anderen, ist das das gleiche, wie mit (-1) zu multiplizieren und zu addieren. Dabei dreht sich jedoch das Ungleichungszeichen um und man darf nicht mehr addieren, ohne Vorher bei einer Ungleichung die Seiten zu tauschen (macht euch mal ein Beispiel).

(39) Mit Fourier-Motzkin kann man lineare Programme lösen.
Ja.

(40) Auch mit dem Simplex Verfahren kann man lineare Programme lösen.
Ja.

5. Ganzzahligkeitstheorie

(1) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ heißt vollständig unimodular, falls $\det(A) \in \{-1, 0, 1\}$.
Nein. Insbesondere ist die Determinante nur für quadratische Matrizen definiert.

(2) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ heißt vollständig unimodular, falls für jede quadratische Teilmatrix B von A gilt, dass $\det(B) \in \{-1, 0, 1\}$.
Ja.

(3) Falls A vollständig unimodular ist, ist auch die Matrix $\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}$ vollständig unimodular.
Ja.

(4) Falls A vollständig unimodular ist, ist auch die Matrix $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$ vollständig unimodular.
Ja.

(5) Falls A und B vollständig unimodular sind, ist auch die Matrix $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ vollständig unimodular.
Nein. Zum Beispiel $A = (1, 1)$ und $B = (-1, 1)$ sind vollständig unimodular, aber $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ hat Determinante 2, ist also nicht vollständig unimodular.

(6) Jede Matrix mit nur ganzzahligen Einträgen ist vollständig unimodular.
Nein. Selbes Beispiel wie gerade.

(7) Jede Matrix, die nur Einträge $-1, 0$ oder 1 hat, ist vollständig unimodular.
Nein. Selbes Beispiel wie gerade.

(8) Falls $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ vollständig unimodular ist und $b \in \mathbb{R}^m$, dann ist das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$ ganzzahlig.
Nein. Zum Beispiel für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ hat P die Ecke $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Maximiert man z.B. in Richtung $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, wird das Maximum $\max\{c^T x : x \in P\}$ auch in dieser Ecke angenommen. Also ist P nicht ganzzahlig.

(9) Falls $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ vollständig unimodular ist und $b \in \mathbb{Z}^m$, dann ist das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$ ganzzahlig.
Ja.

(10) Falls ein ganzzahliges Polyeder Ecken besitzt, sind diese auch ganzzahlig.
Ja. Ein Beweis kommt vielleicht in der Sonderübung. Ansonsten gab es letztes Jahr auch eine ähnliche Übungsaufgabe, da wurde glaube ich eine stärkere Aussagen bewiesen.

(11) Falls das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n : x \ge 0, Ax \le b\}$ für alle $b \in \mathbb{Z}^m$ ganzzahlig ist, dann ist A vollständig unimodular.
Ja. Satz von Hoffman-Kruskal.

(12) Es gilt immer

$$\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n, Ax \le b\} = \max\{c^T x : x \in \mathbb{Z}^n, Ax \le b\}.$$

Nein.

(13) Es gilt

$$\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\} = \max\{c^T x : x \in \mathbb{Z}^n, Ax \leq b\},$$

falls A vollständig unimodular ist.
Nein. Auch das reicht noch nicht unbedingt.

(14) Es gilt

$$\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\} = \max\{c^T x : x \in \mathbb{Z}^n, Ax \leq b\},$$

falls A vollständig unimodular ist und b ganzzahlig.
Ja. Das sind die Voraussetzungen, die man braucht.

(15) Die Inzidenzmatrix eines ungerichteten Graphen ist vollständig unimodular.
Nein. Nur wenn der Graph bipartit ist.

(16) Die Inzidenzmatrix eines ungerichteten bipartiten Graphen ist vollständig unimodular.
Ja.

(17) Die Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen ist vollständig unimodular.
Ja.

(18) Falls die Inzidenzmatrix eines ungerichteten Graphen vollständig unimodular ist, ist der Graph bipartit.
Ja.