MC-FRAGEN

Beantworte die folgenden Fragen mit „Richtig“ oder „Falsch“.

1. Kürzeste Wege

Es sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph mit Kantenlängenfunktion $l\colon A \to \mathbb{R}$ und seien $s, t \in V$ zwei Knoten.

(1) Ein Weg P von s nach t ist eine Abfolge von Knoten und Kanten, die mit s beginnt und mit t endet.
(2) Jeder Weg ist auch eine Kantenfolge.
(3) Jede Kantenfolge ist auch ein Weg.
(4) Bezüglich der Kantenlängenfunktion l gibt es immer eine kürzeste s-t-Kantenfolge.
(5) Bezüglich der Kantenlängenfunktion l gibt es immer einen kürzesten s-t-Weg.
(6) Ein Potential p ist eine Abbildung $p\colon V \to \mathbb{R}$, sodass für jede Kante $a = (v, w)$ gilt, dass $p(w) - p(v) \geq l(a)$.
(7) Es gibt immer ein Potential.
(8) Es gilt

$$\min\{l(P) : P \text{ ist } s\text{-}t\text{-Weg }\} = \max\{p(t) - p(s) : P \text{ ist Potential}\}.$$

2. Matchings in bipartiten Graphen

Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter bipartiter Graph.

(1) Es gibt $U, W \subseteq V$, sodass $V = U \cup W$ mit $U \cap W = \emptyset$ und je zwei Knoten aus U sind nicht benachbart und je zwei Knoten aus W sind nicht benachbart.
(2) Ein Matching $M \subseteq E$ ist eine Menge von Kanten, die alle Knoten in V überdecken.
(3) Jeder ungerichtete Graph besitzt ein Matching
(4) Ein Matching $M \subseteq E$ heißt perfekt, falls es für jeden Knoten $v \in V$ eine Kante $e \in M$ gibt mit $v \in e$.
(5) Jeder ungerichtete Graph besitzt ein perfektes Matching.
(6) Sei $M \subseteq E$ ein Matching in G. In einem M-augmentierenden Weg P sind beide Endknoten nicht von M überdeckt und P besteht abwechselnd aus Kanten nicht in M und Kanten in M.
(7) M ist ein maximales Matching $\Leftrightarrow$ Es gibt einen M-augmentierenden Weg.
(8) Es sei $M \subseteq E$ ein Matching und P ein M-augmentierender Weg. Die symmetrische Differenz $M \triangle P$ ist wieder ein Matching mit $|M \triangle P| = |M| + 1$.
(9) Ein M-augmentierender Weg kann aus einer eizelnen Kante bestehen.
(10) Eine Knotenüberdeckung $C \subseteq V$ ist eine Menge von Knoten, die paarweise nicht benachbart sind.
(11) Es gilt

$$\max\{|M| : M \text{ ist Matching}\} = \min\{|C| : C \text{ ist Knotenüberdeckung}\}.$$

(12) Der obige Satz heißt Satz von König und ist wichtig für die Klausur.

(13) Der Satz von König gilt auch in allgemeinen (nicht bipartiten) Graphen.
(14) Mit dem Satz von König lässt sich der Satz von Hall beweisen.
(15) Mit dem Satz von Hall lässt sich der Satz von König beweisen.
(16) M heißt Matching mit maximalem Gewicht, falls M die maximale Anzahl von Kanten besitzt und unter allen Matchings mit maximaler Kantenanzahl das größte Gewicht besitzt.
(17) M heißt extremes Matching, falls M unter allen Matchings mit gleicher Kantenanzahl wie M das größte Gewicht besitzt.

3. Flüsse in Netzwerken

Es sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph mit Kapazitätsfunktion $c\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und seien $s, t \in V$ zwei Knoten.

(1) Ein s-t-Fluss, der durch c beschränkt ist, ist eine Abbildung $f\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(a) \leq c(a)$ für alle $a \in A$, die das Flusserhaltungsgesetz erfüllt:

$$\text{Für alle } v \in V \text{ gilt } \sum_{a \in \delta^{\text{in}}(v)} f(a) = \sum_{a \in \delta^{\text{out}}(v)} f(a).$$

(2) Der Wert eines s-t-Flusses f ist

$$\text{value}(f) = \sum_{a \in \delta^{\text{out}}(s)} f(a) - \sum_{a \in \delta^{\text{in}}(t)} f(a).$$

(3) Es sei $U \subseteq V$ mit $s \in U$, $t \notin U$. Der von U induzierte s-t-Schnitt ist definiert als

$$\delta^{\text{out}}(U) = \{(u, w) \in A : u \in U,\ w \notin U\}.$$

(4) Ein s-t-Schnitt ist eine Knotenmenge.
(5) Blödsinn. Das wird zwar häufig verwechselt, aber ein s-t-Schnitt ist in Wirklichkeit eine Kantenmenge.
(6) Es sei $\delta^{\text{out}}(U)$ ein s-t-Schnitt. In dem Graphen $(V, A \backslash \delta^{\text{out}}(U))$ gibt es keinen gerichteten Weg mehr von s nach t.
(7) Es gilt

$$\max\{\text{value}(f) : f \text{ ist } s\text{-}t\text{-Fluss}\} = \min\{c(\delta^{\text{out}}(U)) : U \subseteq V, s \in U, t \notin U\}.$$

4. Polyedertheorie

(1) Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, falls

$$\forall x_1, \ldots, x_N \in A\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_N \geq 0 \text{ ist } \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i \in A.$$

(2) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, falls für je zwei Punkte $x, y \in A$ auch die Verbindungsstrecke $[x, y] = \{\alpha x + (1 - \alpha)y : \alpha \in [0, 1]\}$ in A enthalten ist.
(3) Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die konvexe Hülle von A gleich

$$\text{conv}(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathbb{N}, \exists x_1, \ldots, x_N \in A, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_N \geq 0 \text{ mit } \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1 \text{ sodass } y = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i\}.$$

(4) Die konvexe Hülle von $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die größte konvexe Menge, die A enthält.
(5) Ein Polytop ist die konvexe Hülle von beliebig vielen Punkten.

(6) Eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge der Form

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = \delta\}$$

für ein $c \in \mathbb{R}^n$ und ein $\delta \in \mathbb{R}$.

(7) Eine Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = \delta\}$ trennt den $\mathbb{R}^n$ in zwei Halbräume H^+ und H^-, wobei

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \geq \delta\} \text{ und } H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \leq \delta\}.$$

(8) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, abgeschlossen und nicht leer und sei $z \notin C$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt $\pi_C(z) \in C$, sodass $\|\pi_C(z) - z\| = \inf\{\|x - z\| : x \in C\}$.

(9) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, abgeschlossen und nicht leer und sei $z \notin C$. Dann gibt es eine Trennhyperebene H von C und z, d.h. $C \subseteq H^-$ und $z \in H^+$.

(10) Mit der Notation wie bei den letzten beiden Fragen ist

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : (z - \pi_C(z))^T x = (z - \pi_C(z))^T \pi_C(z)\}$$

eine Stützhyperebene an C mit $C \subseteq H^-$ und $z \in H^+$.

(11) Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Kegel, falls für alle $x, y \in K$ und für alle $\lambda \in [0, 1]$ auch $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$ ist.

(12) Jeder nichtleere Kegel enthält 0.

(13) Jede Stützhyperebene an einen nichtleeren Kegel enthält 0.

(14) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kegel. Der duale Kegel von K ist definiert durch

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n : x^T y \leq 1 \ \forall x \in K\}.$$

(15) Ein ordentlicher Kegel ist spitz, abgeschlossen und nichtleer.

(16) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Ein Punkt $z \in C$ heißt Extrempunkt von C, falls es $x, y \in C$ und $\alpha \in (0, 1)$ gibt mit $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$.

(17) Ein Polyeder ist der Schnitt von beliebig vielen Halbräumen.

(18) Ein Polyeder P ist die Lösungsmenge eines endlichen Systems von linearen Ungleichungen, d.h es gibt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ sodass $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$.

(19) Extrempunkte von Polyedern heißen Ecken.

(20) Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ein Polyeder. Ein Punkt $z \in P$ ist eine Ecke von P genau dann, wenn z midestens n viele Ungleichungen von $Ax \leq b$ mit Gleichheit erfüllt.

(21) Jedes Polyeder ist ein Polytop.

(22) Jedes Polytop ist ein Polyeder.

(23) Jedes Polytop ist beschränkt.

(24) Jedes Polyeder ist beschränkt.

(25) Ein beschränktes Polyeder ist ein Polytop.

(26) Ein Polytop ist ein beschränktes Polyeder.

(27) Die beiden letzten Aussagen sind bekannt als Sätze von Minkowski und Weyl und man hat sie auf fast jedem Übungsblatt benutzen müssen. Also sollte man sie unbedingt für die Klausur lernen.

(28) Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gilt immer genau eine der beiden Aussagen:
  (a) Es gibt ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \leq b$.
  (b) Es gibt ein $y \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}$ mit $y^T A = 0$ und $b^T y < 0$.

(29) Es sei $p^* = \max\{c^T x : Ax \leq b\}$ ein primales lineares Programm. Dann ist das duale lineare Programm gegeben durch

$$d^* = \min\{y^T b : y \geq 0, y^T A = c^T\}.$$

(30) Es gilt immer $p^* \leq d^*$.
(31) Es gilt immer $p^* = d^*$.
(32) Es gilt immer $p^* \geq d^*$.
(33) Es gilt $p^* = d^*$, falls beide Mengen gültiger Lösungen nicht leer sind.
(34) Das Maximum $\max\{c^T x : Ax \leq b\}$ wird an einer Ecke des Polyeders $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ angenommen.
(35) Das Maximum $\max\{c^T x : Ax \leq b\}$ wird an einer Ecke des Polyeders $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ angenommen, falls P beschränkt ist.
(36) Mit dem Verfahren von Fourier und Motzkin kann man feststellen, ob ein System von linearen Ungleichungen lösbar ist.
(37) Ein lineares Ungleichungssystem kann man genau wie ein lineares Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus lösen.
(38) Man muss aufpassen. Man darf lineare Ungleichungen nur addieren und mit positiven Skalaren multiplizieren. Beim Subtrahieren ändert sich im Allgemeinen die Lösungsmenge.
(39) Mit Fourier-Motzkin kann man lineare Programme lösen.
(40) Auch mit dem Simplex Verfahren kann man lineare Programme lösen.

5. Ganzzahligkeitstheorie

(1) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt vollständig unimodular, falls $\det(A) \in \{-1, 0, 1\}$.
(2) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt vollständig unimodular, falls für jede quadratische Teilmatrix B von A gilt, dass $\det(B) \in \{-1, 0, 1\}$.
(3) Falls A vollständig unimodular ist, ist auch die Matrix $\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}$ vollständig unimodular.
(4) Falls A vollständig unimodular ist, ist auch die Matrix $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$ vollständig unimodular.
(5) Falls A und B vollständig unimodular sind, ist auch die Matrix $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ vollständig unimodular.
(6) Jede Matrix mit nur ganzzahligen Einträgen ist vollständig unimodular.
(7) Jede Matrix, die nur Einträge $-1, 0$ oder 1 hat, ist vollständig unimodular.
(8) Falls $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ vollständig unimodular ist und $b \in \mathbb{R}^m$, dann ist das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ganzzahlig.
(9) Falls $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ vollständig unimodular ist und $b \in \mathbb{Z}^m$, dann ist das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ganzzahlig.
(10) Falls ein ganzzahliges Polyeder Ecken besitzt, sind diese auch ganzzahlig.
(11) Falls das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, Ax \leq b\}$ für alle $b \in \mathbb{Z}^m$ ganzzahlig ist, dann ist A vollständig unimodular.
(12) Es gilt immer

$$\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\} = \max\{c^T x : x \in \mathbb{Z}^n, Ax \leq b\}.$$

(13) Es gilt

$$\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\} = \max\{c^T x : x \in \mathbb{Z}^n, Ax \leq b\},$$

falls A vollständig unimodular ist.

(14) Es gilt

$$\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\} = \max\{c^T x : x \in \mathbb{Z}^n, Ax \leq b\},$$

falls A vollständig unimodular ist und b ganzzahlig.

(15) Die Inzidenzmatrix eines ungerichteten Graphen ist vollständig unimodular.

(16) Die Inzidenzmatrix eines ungerichteten bipartiten Graphen ist vollständig unimodular.

(17) Die Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen ist vollständig unimodular.

(18) Falls die Inzidenzmatrix eines ungerichteten Graphen vollständig unimodular ist, ist der Graph bipartit.