Def. 3 Sei A positiv definit mit Spektralzerlegung $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^T$. Dann ist $\sqrt{A}$, die Wurzel von A, definiert als $\sqrt{A} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i}\, u_i u_i^T$.

Satz 4 Es gilt

$$\operatorname{vol} \mathcal{E}(A, x) = \sqrt{\det A} \cdot \operatorname{vol} B_n,$$

wobei $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ die n-dimensionale Einheitskugel ist, und $\operatorname{vol} B_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ ist, mit

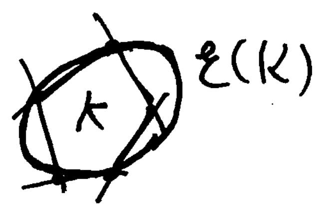
$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Bew.: Da vol translationsinvariant ist, gilt $\operatorname{vol} \mathcal{E}(A,x) = \operatorname{vol} \mathcal{E}(A,0)$. Das Ellipsoid $\mathcal{E}(A,0)$ ist das Bild von B_n unter der linearen Abbildung $\sqrt{A}$, d.h. $\mathcal{E}(A,0) = \sqrt{A}\, B_n$. Also

$$\operatorname{vol} \mathcal{E}(A,0) = \int_{\mathcal{E}(A,0)} 1 \, dx = \int_{\sqrt{A} B_n} 1 \, dx \overset{\text{Transformationformel}}{=} \det \sqrt{A} \int_{B_n} 1 \, dx$$

$$= \sqrt{\det A} \operatorname{vol} B_n. \qquad \boxtimes$$

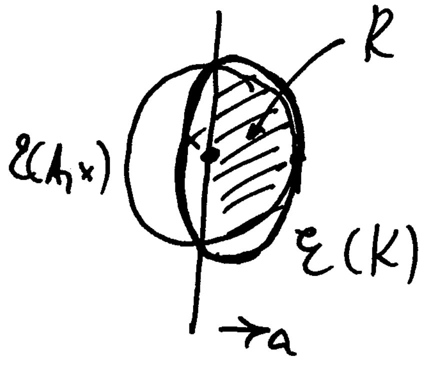
Satz 5 Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe und kompakte Menge, $K \neq \emptyset$. Dann $\exists!$ Ellipsoid $\mathcal{E}(K)$ mit $K \subseteq \mathcal{E}(K)$, das minimales Volumen besitzt. (die beste äußere ellipsoide Approximation von K). $\mathcal{E}(K)$ heißt das Loewner-John-Ellipsoid von K.



Bew.: in der Vorlesung „Konvexe Optimierung".

Hier: einfacher Spezialfall

$$K = \mathcal{E}(A,x) \cap \{y \in \mathbb{R}^n : a^T y \geq a^T x\} \text{ mit } a \neq 0.$$



Lemma 6 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit, $x \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$. Dann gilt für

$$K = \mathcal{E}(A,x) \cap \{y \in \mathbb{R}^n : a^T y \geq a^T x\} :$$

$$\mathcal{E}(K) = \mathcal{E}(A', x')$$

mit $A' = \frac{n^2}{n^2-1}\left(A - \frac{2}{n+1} bb^T\right)$, $x' = x + \frac{1}{n} b$

und $b = \frac{1}{\sqrt{a^T A a}} A a$.

Desweiteren gilt $\frac{\operatorname{vol} \mathcal{E}(A', x')}{\operatorname{vol} \mathcal{E}(A, x)} < e^{-\frac{1}{2(n+1)}} < 1$.

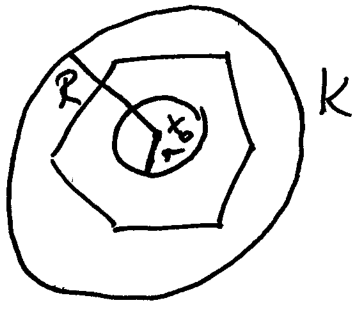
Bew.: durch Nachrechnen; elementar, aber fehleranfällig.

§ 2 Trennen und Optimieren

Voraussetzung: Sei $\mathcal{K}$ eine Menge von konvexen und kompakten Mengen. Angenommen für jeden $K \in \mathcal{K}$ mit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kennen wir $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r, R > 0$, so dass

$$x_0 + rB_n \subseteq K \subseteq x_0 + RB_n$$

gilt.

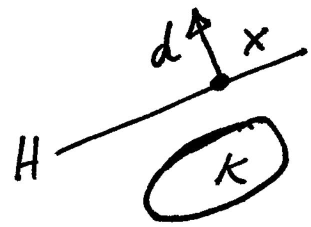


Def. 1 Trennungsproblem

Eingabe: $K \in \mathcal{K}$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$

Ausgabe: „$x \in K$" oder $d \in \mathbb{R}^n$ mit $d^T x > \max_{y \in K} d^T y$.

Im zweiten Fall trennt die Hyperebene $H = \{y \in \mathbb{R}^n : d^T y = d^T x\}$ x von K.



Bsp. 2 Falls $K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$ ein (beschränktes) Polyeder ist, dann kann man das Trennungsproblem wie folgt lösen: Für $x \in \mathbb{R}^n$ überprüfe, ob $a_i^T x \le b_i$, $i = 1, \dots, m$ gilt. Falls ja, dann „$x \in K$". Falls nein, dann $\exists i$: $a_i^T x > b_i$ und setze $d = a_i$.

Def. 3 Optimierungsproblem

Eingabe: $c \in \mathbb{R}^n$ mit $\|c\| = 1$, $\varepsilon > 0$, $K \in \mathcal{K}$.

Ausgabe: $x \in K$ mit $c^T x \ge \max_{y \in K} c^T y - \varepsilon$.

Bsp. 4 Falls $K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ein (beschränktes) Polyeder ist, dann ist für $c \in \mathbb{R}^n$ das Optimierungsproblem ein (approximatives) lineares Programm.

Satz 5 (Grötschel, Lovász, Schrijver, 1981; basierend auf der Ellipsoidmethode)

Für die Menge K lässt sich das Optimierungsproblem durch N-fachen Lösen des Trennungsproblem lösen, wobei N so gewählt werden muss, dass die Ungleichung

$$2 \frac{R^2}{r} e^{-\frac{N}{2(n+1)n}} \leq \varepsilon$$

gilt.

Bew. von Satz 5: Ellipsoidmethode

$E_0 = \mathcal{E}(R^2 I, x_0)$
for $k = 0, \ldots, N-1$:
  Löse Trennungsproblem für x_k, x_k Mittelpunkt von E_k.
  if $x_k \in K$:
    $a = c$
  else
    $a = -d$
  $E_{k+1} = \mathcal{E}(E_k \cap \{y \in \mathbb{R}^n : a^T y \geq a^T x_k\})$.