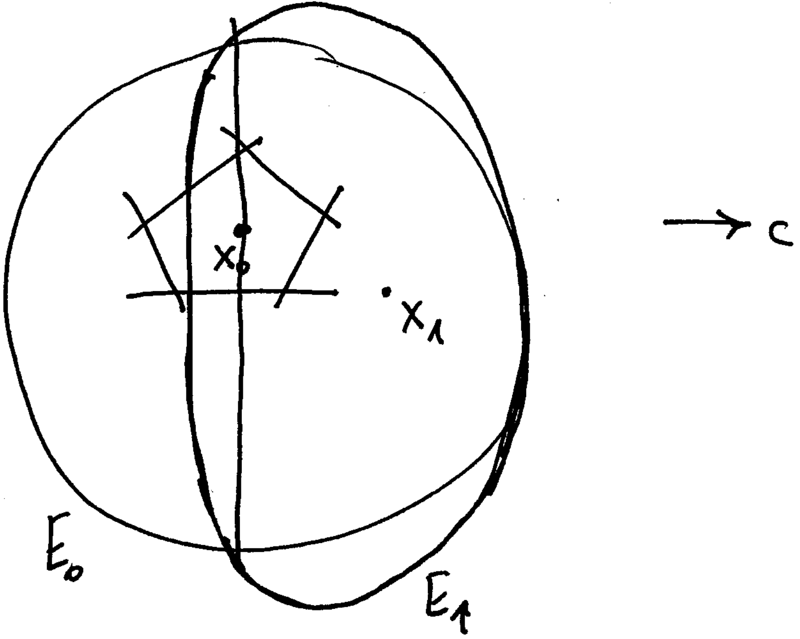


Lemma 6 Seien

$$\xi_k = \max\{c^T x_j : 0 \le j < k,\ x_j \in K\}$$

und

$$K_k = K \cap \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \ge \xi_k\}.$$

Dann gilt $K_k \subseteq E_k$.

Bew.: per Induktion nach k.

$k = 1$: $\xi_1 = c^T x_0$.

$$K_1 = K \cap \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \ge c^T x_0\}.$$

Weil $x_0 \in K$ ist, gilt $a = c$. Also

$$\begin{aligned} E_1 &= \mathcal{E}(E_0 \cap \{y \in \mathbb{R}^n : c^T y \ge c^T x_0\}) \\ &\supseteq \mathcal{E}(\underbrace{K \cap \{y \in \mathbb{R}^n : c^T y \ge c^T x_0\}}_{K_1}) \\ &\supseteq K_1. \end{aligned}$$

$\underline{k \to k+1}$ $\quad K_{k+1} = K \cap \{y \in \mathbb{R}^n : c^T y \geq \gamma_{k+1}\}$.

$\underline{\text{1. Fall:}}$ $\quad x_k \in K$.

Dann $a = c$ und

$$
\begin{aligned}
E_{k+1} &= \mathcal{E}\left(E_k \cap \{y \in \mathbb{R}^n : c^T y \geq c^T x_k\}\right) \\
&\supseteq \mathcal{E}\left(E_k \cap \{y \in \mathbb{R}^n : c^T y \geq \gamma_{k+1}\}\right) \\
&\overset{\text{I.V.}}{\supseteq} \mathcal{E}\left(\underbrace{K_k \cap \{y \in \mathbb{R}^n : c^T y \geq \gamma_{k+1}\}}_{K_{k+1}}\right) \\
&\supseteq K_{k+1}.
\end{aligned}
$$

$\underline{\text{2. Fall:}}$ $\quad x_k \notin K$.

Dann $a = -d$ und $K_{k+1} = K_k$ und

$$
\begin{aligned}
E_{k+1} &= \mathcal{E}\left(E_k \cap \{y \in \mathbb{R}^n : d^T y \leq d^T x_k\}\right) \\
&\supseteq \mathcal{E}\left(E_k \cap K\right) \\
&\overset{\text{I.V.}}{\supseteq} \mathcal{E}\left(K_k\right) \\
&\supseteq K_k = K_{k+1}.
\end{aligned}
$$

$\boxtimes$

Lemma 7 Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei j ein Index mit $0 \le j < k$ und $\xi_k = c^T x_j$. Dann gilt

$$c^T x_j \ge \max_{y \in K} c^T y - 2 \frac{R^2}{r} e^{-\frac{k}{2(n+1)n}}$$

Bew.: Sei $z \in K$ eine optimale Lösung, d.h.

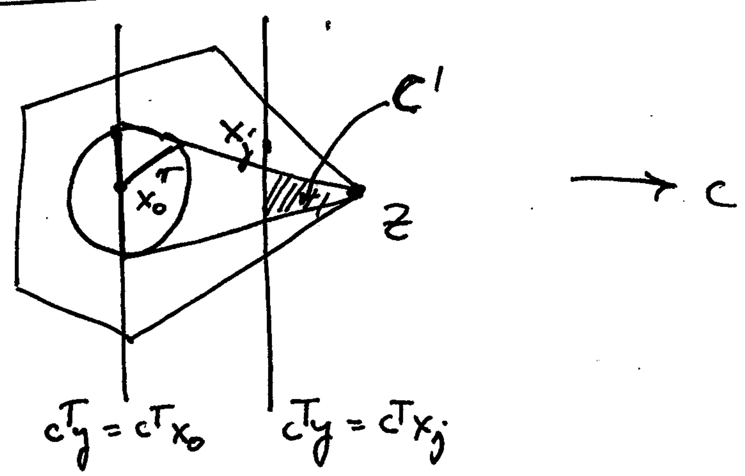
$$c^T z = \max_{y \in K} c^T y.$$

Betrachte den runden Kegelstumpf C mit Spitze C und Basis

$$x_0 + r B_n \cap \{ y \in \mathbb{R}^n : c^T y = c^T x_0 \}.$$

Sei $C' = C \cap \{ y \in \mathbb{R}^n : c^T x \ge c^T x_j \}$.

Bild dazu (Dimension 2)



Das Volumen von C' ist

$$\operatorname{vol} C' = \frac{r^{n-1} \operatorname{vol} B_{n-1}}{n} \left(c^T z - c^T x_0\right) \left(\frac{c^T z - c^T x_j}{c^T z - c^T x_0}\right)^n.$$

Nach Lemma 6 gilt $C' \subseteq K_k \subseteq E_k$. Also

$$\operatorname{vol} C' \leq \operatorname{vol} E_k \overset{L.1.6.}{\leq} \operatorname{vol} E_0 \cdot \left(e^{-\frac{1}{2(n+1)}}\right)^k$$
$$\leq R^n \operatorname{vol} B_n \; e^{-\frac{k}{2(n+1)}}.$$

Cauchy-Schwarz:

$$|c^T z - c^T x_0| \leq \underbrace{\|c\|}_{=1} \underbrace{\|z - x_0\|}_{\leq R} \leq R.$$

Zusammen

$$\left(c^T z - c^T x_j\right)^n \leq R^n \operatorname{vol} B_n \; e^{-\frac{k}{2n+1}} \frac{n \, (\overbrace{c^T z - c^T x_0}^{\leq R})^{n-1}}{r^{n-1} \operatorname{vol} B_{n-1}}.$$

Also (da $1 \leq \frac{R}{r}$)

$$c^T z - c^T x_j \leq \underbrace{\left(\frac{n \operatorname{vol} B_n}{\operatorname{vol} B_{n-1}}\right)^{1/n}}_{\leq 2.} \frac{R^2}{r} \; e^{-\frac{k}{2(n+1)n}}. \qquad \boxtimes$$

Nun folgt unmittelbar Satz 5. $\boxtimes$

Bem.: Algorithmus ist an einer Stelle stark idealisiert: Haben angenommen, dass wir mit unendlicher Genauigkeit rechnen können. Zur Berechnung der Ellipsoide werden Wurzeln gezogen.

Aber: Algorithmus kann leicht verändert werden, um dieses Problem zu umgehen. Dafür wird die Analyse deutlich technischer.