Kapitel IX: Spieltheorie

Mathematische Spieltheorie: Entscheidungsverhalten von "Spielern" in Konfliktsituationen modellieren und analysieren.

Auch hier kann Polyedertheorie und Lineare Programmierung zum Einsatz kommen.

§1 Bimatrix-Spiele

Beispiel 1: Prisoners' Dilemma

Zwei Gefangene werden eines gemeinsamen Verbrechens beschuldigt.

Sie können schweigen, oder gestehen.

- Gestehen sie, können sie damit ihre Strafe verringern, aber es erhöht die Strafe des Anderen.
- Schweigen beide, so bekommen sie eine geringere Strafe, als wenn beide gestehen.

Die Ergebnisse der möglichen Verhaltensweisen lassen sich in einem Matrix-Paar darstellen:

Strafe für Gefangenen 1 in Jahren:

$$\begin{array}{c|cc} & \text{2 sagt aus} & \text{2 schweigt} \\ \hline \text{1 sagt aus} & 5 & 0 \\ \text{1 schweigt} & 6 & 1 \end{array}$$

Entsprechend steht die Matrix für Gefangenen 2 wie folgt aus:

$$\begin{array}{c|cc} & \text{2 sagt aus} & \text{2 schweigt} \\ \hline \text{1 sagt aus} & 5 & 6 \\ \text{1 schweigt} & 0 & 1 \end{array}$$

Insgesamt schreiben wir das Spiel als

$$(A,B) = \begin{pmatrix} 5,5 & 0,6 \\ 6,0 & 1,1 \end{pmatrix}$$

Der Gefangene 1 ist der <u>Zeilenspieler</u> Z;
Der Gefangene 2 ist der <u>Spaltenspieler</u> S.
Beide wollen einen möglichst kleinen Eintrag erreichen, unter der Bedingung der Wahl des Anderen.

<u>Allgemein</u>: Sei $(A,B) = (A_{ij}, B_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die Auszahlungsmatrix für Zeilenspielerin Z und Spaltenspielerin S.

- Z versucht den maximalen Wert A_{ij} zu bekommen, unter der Bedingung dass S die Spalte festlegt.
- S versucht den maximalen Wert B_{ij} zu bekommen, unter der Bedingung dass Z die Zeile festlegt.

Beide Spieler werden versuchen, die Wahl des Anderen zu erahnen.

Dies modellieren wir wie folgt: Wir stellen uns vor, dass das Spiel sehr häufig gespielt wird, und dass die Spieler ihre Wahl nicht vom Ausgang vorheriger Spiele abhängig machen. Sie wählen also jede Zeile/Spalte mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit.

Definition 2: Sei u_i die Wahrscheinlichkeit, dass Z die Zeile i wählt, und sei v_j die W'keit, dass S die Spalte j wählt.

Dann sind $u = (u_1, \dots, u_m)$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ mit

$u, v \geq 0$, $u \cdot e = 1$, $e^T v = 1$

gemischte Strategien für Z resp. S

(wobei e für den Vektor mit Einsen der passenden Länge steht).

Für Strategie v_0 von S ist u_0 eine beste Antwort, falls

$$u_0 A v_0 = \max\{u A v_0 : u \geq 0, u \cdot e = 1\}.$$

Entsprechend ist v_0 eine beste Antwort auf u_0, falls

$$u_0 B v_0 = \max\{u_0 B v : v \geq 0, e^T v = 1\}$$

Fortsetzung Bsp 1: Da wir im Allgemeinen Fall maximieren, betrachten wir die Bimatrix

$$\begin{pmatrix} -5,-5 & 0,-6 \\ -6,0 & -1,-1 \end{pmatrix}.$$

Sei $v_0 = \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$ fest, mit $0 \leq q \leq 1$. Wollen beste Antwort auf v_0:

$$\max \left\{ \begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} : 0 \leq p \leq 1 \right\}$$

$$= \max \left\{ \begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -5q \\ -5q-1 \end{pmatrix} : 0 \leq p \leq 1 \right\}$$

$$= \max \left\{ p - 5q - 1 : 0 \leq p \leq 1 \right\}.$$

Also ist $p = 1$ und somit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T$ die eindeutige beste Antwort, egal wie q gewählt war.

Genauso sieht man, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die beste Antwort für S ist.

⚠ Nicht immer ist die beste Antwort unabhängig von der Wahl des Gegners (→ Aufgabe 15.3)

Definition 3: Ein **Gleichgewicht** (Nash equilibrium) ist ein Paar u_0, v_0 von Strategien, so dass u_0 beste Antwort auf v_0 ist, und v_0 beste Antwort auf u_0.

Der **Wert** eines Gleichgewichts ist $(u_0 A v_0, u_0 B v_0)$.

Beispiel 4: Gegeben sei das Spiel

$$\begin{pmatrix} 2,-1 & -2,-2 \\ 1,\frac{3}{2} & -1,2 \end{pmatrix}$$

Beste Antworten:

- Für $0 \le q \le 1$ fest: $\begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 4q-2 \\ 2q-1 \end{pmatrix} = p(2q-1) + 2q-1$$

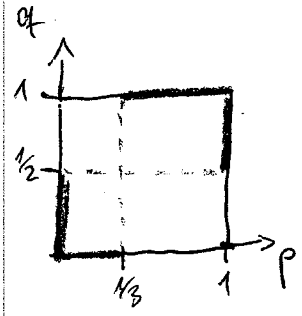
$\Rightarrow$ Für $q < \frac{1}{2}$ wähle $p = 0$, für $q > \frac{1}{2}$ wähle $p = 1$

- Für $0 \le p \le 1$ fest: $\begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}p + \frac{3}{2} \\ -4p+2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = q\left(\frac{3}{2}p - \frac{1}{2}\right) + 2 - 4p$$

$\Rightarrow$ Für $p < \frac{1}{3}$ wähle $q = 0$, für $p > \frac{1}{3}$ wähle $q = 1$.

<u>Graphisch:</u>



Es gibt 3 Schnittpunkte, und jeder davon ist ein Gleichgewicht.

- Gleichgewicht $(0,1),\binom{0}{1}$ hat Wert $(-1,2)$
- Gleichgewicht $(\frac{1}{3},\frac{2}{3}),\binom{1/2}{1/2}$ hat Wert

$$\frac{1}{6}(2,-1)+\frac{1}{6}(-2,-2)+\frac{2}{6}(1,\tfrac{3}{2})+\frac{2}{6}(-1,2)=(0,\tfrac{4}{6})$$

$$=(0,\tfrac{2}{3})$$

- Gleichgewicht $(1,0),\binom{1}{0}$ hat Wert $(2,-1)$.

<u>Bemerkung:</u> Da die Werte der Gleichgewichte sehr unterschiedlich sind, ist nicht klar, dass sie im Spiel tatsächlich erreicht werden.

Z wird versuchen, den Wert $(2,-1)$ zu erreichen,
S — " — , — " — $(-1,2)$ — " — .

Wenn beide entsprechend spielen, landen sie bei $(-2,-2)$.