**Definition 5:** Sei $P \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $P_{ij} \geq 0$ und $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1$.

Dann heißt $P$ <u>korreliertes Gleichgewicht</u> (oder Korrelationsmatrix) für $(A, B)$ falls gilt:

Wenn mit W'keit $P_{ij}$ Z geraten wird, $i$ zu wählen und S geraten wird, $j$ zu wählen (und ihnen nicht gesagt wird, was dem Anderen geraten wurde), dann ist es für Beide am besten, dem Rat zu folgen.

Der <u>Wert</u> des Korrelierten Gleichgewichts ist $\sum_{i,j} P_{ij} (A_{ij}, B_{ij})$.

**Fortsetzung Bsp. 4:** Für das Spiel

$$\begin{pmatrix} 2,-1 & -2,-2 \\ 1,\frac{3}{2} & -1,2 \end{pmatrix}$$

ist ein Korreliertes Gleichgewicht gegeben durch $$P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Denn:

- Raten wir Z, Zeile 1 zu wählen, dann weiß Z, dass wir mit W'keit 1 S raten, Spalte 1 zu wählen, also Strategie $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ zu spielen.
  Beste Antwort: $(1,0)$. Also wählt Z am besten Zeile 1
- Raten wir Z, Zeile 2 zu wählen, dann weiß Z, dass wir mit W'keit $\frac{0{,}3}{0{,}3+0{,}5} = \frac{3}{8}$ S raten, Spalte 1 zu wählen, und mit W'keit $\frac{5}{8}$ Spalte 2.
  Da $\frac{3}{8} < \frac{1}{2}$, ist die beste Antwort auf $\begin{pmatrix}3/8\\5/8\end{pmatrix}$ also $(0,1)$.
- Raten wir S zu Spalte 1, dann beraten wir Z nach Strategie $\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$. Da $\frac{2}{5} > \frac{1}{3}$, ist die beste Antwort $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.
- Raten wir S zu Spalte 2, dann beraten wir Z nach Strategie $(0,1)$. Die beste Antwort ist $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Der Wert ist $\frac{2}{10}(2,-1) + \frac{3}{10}\left(1, \frac{3}{2}\right) + \frac{5}{10}(-1,2) = \left(\frac{1}{5}, \frac{5}{4}\right)$

## § 2 Matrixspiele

Für ein Spiel $(A,B)$ mit $A_{ij} = -B_{ij}$ für alle $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$ reicht es, eine Matrix zu betrachten.

Z versucht zu maximieren, S versucht zu minimieren.

**Beispiel 1:** Stein-Schere-Papier

$$\begin{array}{c|ccc} & \text{Stein} & \text{Schere} & \text{Papier} \\ \hline \text{Stein} & 0 & 1 & -1 \\ \text{Schere} & -1 & 0 & 1 \\ \text{Papier} & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Für feste Strategie $v$, finde beste Antwort:

$$\max \{ uAv : u \geq 0 \quad ue = 1 \}$$

$$= \max \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_i A_{ij} v_j : u_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} u_i = 1 \right\}$$

$$= \max \left\{ \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} A_{ij} v_j : u_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} u_i = 1 \right\}$$

$$= \max \left\{ \sum_{i=1}^{m} u_i (Av)_i : u_i \geq 0 \ \sum_{i=1}^{m} u_i = 1 \right\}$$

$$= \max_{i=1,\dots,m} (Av)_i$$

Da $S$ auf der gleichen Matrix $A$ minimiert ist die beste Antwort $v_0$ mit

$$uAv_0 = \min\left\{ \max_{i=1,\dots,m} (Av)_i \;:\; v \geq 0 \,,\, e^T v = 1 \right\}$$

Dies können wir als Lineares Programm schreiben:

(PLP) $\min \lambda$

$$Av \leq \lambda e$$
$$v \geq 0$$
$$e^T v = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \min \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda \\ v \\ s \end{pmatrix}$$

$$e^T v = 1$$
$$Av + s = \lambda e$$
$$\lambda \in \mathbb{R} \,,\, v, s \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \min \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ v \\ s \end{pmatrix}$$

$$e^T v = 1$$
$$-(p-q)e + Av + s = 0$$
$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ v \\ s \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \min \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ v \\ s \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \cdots 1 & 0 \cdots 0 \\ -1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & A & I \\ -1 & 1 & & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ v \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \,, \quad \begin{pmatrix} p \\ q \\ v \\ s \end{pmatrix} \geq 0$$

In dieser Form können wir leicht das duale Programm schreiben:

(DLP) $\max \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}\mu\\y\end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \cdots -1 \\ 0 & 1 \cdots 1 \\ 1 & \\ \vdots & A^T \\ 1 & \\ 0 & \\ \vdots & I \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{pmatrix}\mu\\y\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\\vdots\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ $\max \mu$ $\qquad$ $\Leftrightarrow$ $\max \mu$

$-e^T y \leq 1,\ e^T y \leq -1$ $\qquad$ $ue = 1$

$\mu e + A^T y \leq 0$ $\qquad$ $uA \geq \mu e^T$

$y \leq 0$ $\qquad$ $u \geq 0$

Also beschreibt (DLP) die beste Antwort für Z.
Da beide Programme gültige Lösungen haben (Welche z.B.?), wissen wir dass die optimalen Werte gleich sind.

<u>Satz 2:</u> (von Neumann, 1928) (Minimax-Theorem)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{R}$ mit

$$\min_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ v \geq 0, e^T v = 1}} \max_{\substack{u \in \mathbb{R}^m \\ u \geq 0\ ue = 1}} uAv = k = \max_{\substack{u \in \mathbb{R}^m \\ u \geq 0, ue = 1}} \min_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ v \geq 0, e^T v = 1}} uAv.$$