Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
M. Sc. M. Dostert
Dr. F. von Heymann

Nichtlineare Optimierung (mit Schwerpunkt: semidefinite Optimierung)

Wintersemester 2013/2014

— Aufgabenblatt 13 —

Aufgabe 13.1 Definiere die konvexen Kegel

$$\mathcal{N}^n = \{M \in \mathcal{S}^n : \forall i, j \in \{1, \ldots, n\} : M_{ij} \geq 0\}$$

und

$$\mathcal{K}^n = \mathcal{S}^n_{\succeq 0} + \mathcal{N}^n = \{P + N : P \in \mathcal{S}^n_{\succeq 0},\ N \in \mathcal{N}^n\}.$$

Es sei eine symmetrische Matrix $M = (M_{ij}) \in \mathcal{S}^n$ gegeben. Betrachte das Polynom:

$$p_M(x) = \sum_{i,j=1}^{n} M_{ij} x_i^2 x_j^2.$$

Zeige: p_M ist genau dann eine Summe von Quadraten, wenn M in $\mathcal{K}^n$ liegt.

Aufgabe 13.2 Verwende semidefinite Optimierung, um das Minimum des Polynoms

$$p(x) = 4x^8 + 4x^7 - 25x^6 - x^5 + 6x^4 + 2$$

im Intervall $[-2, 3]$ zu bestimmen.

Abgabe: freiwillig

— Übungsklausur —

Aufgabe 13.a

1. Es seien K_1, K_2 konvexe Kegel. Zeigen Sie: $(K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$.
2. Zeigen Sie: Die Matrix

$$M_n = \left(\frac{1}{i+j+1} \right)_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{S}^n$$

ist positiv semidefinit.

Hinweis: Betrachten Sie das Skalarprodukt auf dem Raum V der im Interval $[0, 1]$ stetigen Funktionen

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad \text{für } f, g \in V.$$

und die Vektoren $x^i \in V$.

Aufgabe 13.b Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{1, \ldots, n\}$, n gerade, und mit Kantengewichten $w \in \mathbb{Z}^E_{\geq 0}$. Betrachten Sie folgendes Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \text{maximiere} & \frac{1}{2} \sum\limits_{\{i,j\} \in E} w_{ij}(1 - v_i^{\mathsf{T}} v_j) \\ \text{wobei} & v_i \in S^{n-1}, i \in V \\ & \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=i+1}^{n} v_i^{\mathsf{T}} v_j \leq -n/4. \end{array}$$

1. Schreiben Sie das obige Problem als Optimierungsproblem über dem Kegel $\mathcal{S}^n_{\succeq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$.
2. Bestimmen Sie das Duale.
3. Zeigen Sie, dass die Dualitätslücke Null ist.

Aufgabe 13.c Bestimmen Sie $\vartheta(\text{Cayley}(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}, \{6, -6\}))$.

Aufgabe 13.d Es seien $2n$ Punkte $x_1, \ldots, x_{2n}$ auf der Sphäre S^{n-1} gegeben. Was ist der größtmögliche minimale Winkel zwischen verschiedenen Punkten x_i und x_j mit $i \neq j$?

Hinweis: Für $\alpha = (n-3)/2$ gilt

$$P_0^{(\alpha,\alpha)}(u) = 1, \; P_1^{(\alpha,\alpha)}(u) = u, \; P_2^{(\alpha,\alpha)}(u) = \frac{n}{n-1}u^2 - \frac{1}{n-1}.$$

Aufgabe 13.e

1. Lösen Sie folgendes Minimierungsproblem:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i : x_1, \ldots, x_n \geq 0, \; \prod_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}.$$

2. Bestimmen Sie für jede Dimension n ein n-dimensionales, zentralsymmetrisches Polytop P mit $\mathcal{E}_{out}(P) = B_n$ und weisen Sie diese Eigenschaft nach.

Aufgabe 13.f Liegt das Polynom

$$p(x) = 3x^6 - 2x^5 + 3x^4 + 2x^2 + 4x + 2$$

im Kegel $\Sigma_{1,6}$? Begründen Sie Ihre Antwort.