Universität zu Köln
Mathematatisches Institut
Dr. F. von Heymann
M. Dostert, M.Sc.

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2016

— Aufgabenblatt 0 —

Die folgenden Aufgaben sind als Einladung gedacht, um das Verständnis der Grundlagen aus den vorherigen Vorlesungen aufzufrischen.

Abgabe: Keine. Allerdings sind zur Übungsanmeldung drei zufällig augewählte Fragen richtig zu beantworten. Sie können dieses "Quiz" auf der Homepage aber beliebig oft aufrufen.

Aufgabe 0.1 Seien x, y und z Elemente eines normierten Vektorraums V, und sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein inneres Produkt auf V. Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

- $\langle x, y \rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ oder $y = 0$.
- $\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$, wobei $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$.
- $\|x + z\| \geq \|x + y\| + \|y + z\|$.
- $\|x + z\| = \|x + y\| + \|y + z\|$ falls y auf der Strecke zwischen x und z liegt.
- $\|x + z\| = \|x + y\| + \|y + z\|$ genau dann, wenn x, y und z linear abhängig sind.

Aufgabe 0.2 Seien x und y zwei Elemente eines normierten Vektorraums V, und sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein inneres Produkt auf V. Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

- $|\langle x, y \rangle| < \|x\| \cdot \|y\|$, falls x, y linear unabhängig sind.
- $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, falls x, y linear unabhängig sind.
- $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$, genau dann, wenn x, y linear abhängig sind.
- $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$, genau dann, wenn x, y linear unabhängig sind.

Aufgabe 0.3 Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix, und $b \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor. Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

- Das System hat immer m Lösungen.
- Das System hat immer unendlich viele Lösungen, falls $m < n$.
- Das System hat immer mindestens eine Lösung, falls $m \leq n$ und $b = 0$.
- Das System hat immer mindestens eine Lösung, falls $m < n$.

Aufgabe 0.4 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix, und $b \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

- $\det(A) \neq 0$ genau dann, wenn es eine eindeutige Lösung des Systems gibt.
- A ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$.

- Sei A_i die Matrix, die aus A entsteht, wenn man die i-te Spalte durch b ersetzt. Dann ist $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Lösung des Systems, mit $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$.
- Sei A_i die Matrix, die aus A entsteht, wenn man die i-te Spalte durch b ersetzt. Dann ist $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Lösung des Systems, mit $x_i = \frac{\det(A)}{\det(A_i)}$.

Aufgabe 0.5 Seien A, B und C Mengen. Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

- Falls $A \subseteq B$ und $A \cap B \subseteq C$, dann gilt $B \subseteq C$.
- $A \cup (B \cap C) \subseteq A \cup C$.
- Falls $A \cap B = \emptyset$ und $B \cap C = \emptyset$, dann gilt $A \cap C = \emptyset$.
- Falls $A \cap B = \emptyset$ und $B \cap C = \emptyset$, dann gilt $A \cap C \neq \emptyset$.
- Falls $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, dann gilt $A \subseteq C$.

Aufgabe 0.6 Sei $A : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen V und W. Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

- $\mathrm{Im}(A)$ ist die Teilmenge von V, auf der A injektiv ist.
- $\mathrm{Im}(A)$ ist die Teilmenge von W, auf die A abbildet.
- $\ker(A)$ ist die Teilmenge von V, die von A auf die Null abgebildet wird.
- $\ker(A)$ ist die Menge der Elemente $v \in V$, die von A auf $\frac{1}{v}$ abgebildet werden.
- $\dim(V) = \dim(\ker(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A))$.

Aufgabe 0.7 Sei $K_v(n, m)$ die Anzahl der Möglichkeiten m Kugeln aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln zu ziehen (Reihenfolge egal). Sei $K_g(n, m)$ die Anzahl der Möglichkeiten m Kugeln aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln zu ziehen (Reihenfolge egal), wobei jede gezogene Kugeln anschließend wieder in die Urne zurückgelegt wird. Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

- $K_v(n, m) = \binom{n+m-1}{m}$?
- $K_v(n, m) = \binom{n+m}{m}$?
- $K_v(n, m) = \binom{n}{m}$?
- $K_g(n, m) = \binom{n+m-1}{m}$?
- $K_g(n, m) = \binom{n+m}{m}$?
- $K_g(n, m) = \binom{n}{m}$?

Aufgabe 0.8 Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $0 < m \leq n$. Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

- $\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}$.

- $\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m-1}$.
- $\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m}$.
- $\binom{n+1}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n}{m-1}$.

Aufgabe 0.9 Seien A und B zwei $n \times n$ Matrizen. Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

- $\det(A^T) = -\det(A)$.
- $\det(A^{-1}) = -\det(A)$, falls $\det(A) \neq 0$.
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, falls $\det(A) \neq 0$.
- $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
- $\det(A)$ ist die Summe der Eigenwerte von A.
- $\det(A)$ ist das Produkt der Eigenwerte von A.
- Sei C eine $m \times n$ Matrix mit n ungleich m, dann gilt $\det(C) = 0$.

Aufgabe 0.10 Seien $f : M \to N$ und $g : N \to P$ Funktionen. So ist $g \circ f$ definiert durch $g \circ f : M \to P$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ für $x \in M$. Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

- Falls $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.
- Falls $g \circ f$ injektiv, so ist g injektiv.
- Falls $g \circ f$ surjektiv, so ist f surjektiv.
- Falls $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

Aufgabe 0.11 Sei $f : A \to B$. Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

- Seien A und B n-elementige Mengen mit $n < \infty$. Falls f injektiv, dann ist f bijektiv.
- Seien A und B n-elementige Mengen mit $n < \infty$. Falls f surjektiv, dann ist f bijektiv.
- Sei A eine endliche Menge. Dann gilt f injektiv genau, dann wenn f surjektiv.
- Falls f injektiv ist, dann ist f auf $\mathrm{Im}(f)$ invertierbar.
- f ist auf $\mathrm{Im}(f)$ invertierbar genau dann, wenn f bijektiv ist.

Aufgabe 0.12 Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

- Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist eine offene Menge.
- Der Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen ist eine offene Menge.
- Der Durchschnitt endlich vieler abgeschlossener Mengen ist eine abgeschlossene Menge.

- Der Durchschnitt abzählbar vieler abgeschlossener Mengen ist eine abgeschlossene Menge.
- Die leere Menge ist offen.
- Die leere Menge ist abgeschlossen.
- Es gibt Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind.

Aufgabe 0.13 Seien A, B und C Aussagen, wobei C von zwei Variablen $n, m \in \mathbb{N}$ abhängt. Die Negation einer Aussage A wird dargestellt als $\neg A$. Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig?

- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow$ es gilt $\neg A$ oder B.
- $\neg(\forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : C(m, n)) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N} : C(m, n)$
- $\neg(\forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : C(m, n)) \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : \neg C(m, n)$