Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
J. Rolfes, M. Sc.

Mathematische Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung

Sommersemester 2016

— Übungsblatt 2 —

Aufgabe 2.1.
Sei $C \subseteq \mathbb{F}_2^{2k}$ ein linearer Code, der selbst-dual ist ($C = C^\perp$) und der gerade ist ($2 \mid w(x)$ für alle $x \in C$). Zeige, dass für den Gewichtszähler $W_C(X,Y) = \sum_{i=0}^{2k} A_i X^{2k-i} Y^i$ gilt:

$$A_i = A_{2k-i} \quad \text{für} \quad i = 0, \ldots, 2k.$$

Aufgabe 2.2.
Sei q eine Primzahlpotenz und sei $r \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann ist $n_r = \frac{q^r-1}{q-1}$ die Anzahl der verschiedenen eindimensionalen Untervektorräume (Geraden) von $\mathbb{F}_q^r$. Ein *Hamming-Code* $\mathcal{H}_{n_r, n_r - r}$ ist ein linearer Code, dessen Kontrollmatrix $H \in \mathbb{F}_q^{r \times n_r}$ wie folgt gegeben ist: In den Spalten von H steht ein vollständiges Repräsentantensystem der Geraden von $\mathbb{F}_q^r$. Zeige: $\mathcal{H}_{n_r, n_r - r}$ ist ein $[n_r, n_r - r, 3]$-Code. (Er ist im übrigen perfekt.)

Aufgabe 2.3. Es sei $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ ein linearer Code, für den gilt:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \exists x \in C : x_i \neq 0.$$

Zeige: Das erwartete Gewicht eines Codesworts ist $n/2$, d.h. es gilt

$$\frac{1}{|C|} \sum_{x \in C} w(x) = \frac{n}{2}.$$

Aufgabe 2.4. Zeige: Der Gewichtszähler eines binären Hamming-Codes $\mathcal{H}_{2^r-1, 2^r-1-r}$ ist

$$W_C(X,Y) = \frac{1}{2^r}(X+Y)^{2^{r-1}-1}((X+Y)^{2^{r-1}} + (2^r-1)(X-Y)^{2^{r-1}}).$$

Abgabe: Am Dienstag, den 3. Mai, um 10 Uhr am Anfang der Vorlesung „Mathematische Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung“. Bitte Namen, Matrikelnummer und Gruppennummer auf die Abgabe schreiben.