



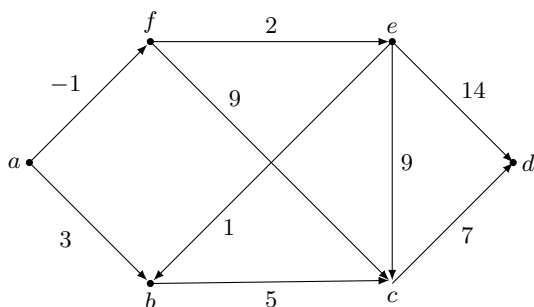
Universität zu Köln
 Mathematisches Institut
 Dr. F. von Heymann
 M. Dostert, M.Sc.

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2016

— Aufgabenblatt 2 —

Aufgabe 2.1 (10 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe des Algorithmus von Bellman-Ford einen kürzesten Weg vom Knoten a zum Knoten d in dem rechtsstehenden Graphen.



Aufgabe 2.2 (10 Punkte)

- a) Sei $U = \{U_1, \dots, U_6\}$ eine Menge von Übungen und $T = \{T_1, \dots, T_4\}$ eine Menge von Tutoren. Zu jedem Tutor gibt es eine Menge von Übungen, die er betreuen könnte:

T_1	T_2	T_3	T_4
U_1, U_2, U_6	U_2, U_4	U_2, U_3, U_5	U_2, U_5, U_6

Darüber hinaus hat jeder Dozent angegeben, welche Tutoren er für geeignet hält:

U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6
T_1, T_2, T_4	T_2, T_3, T_4	T_3, T_4	T_1, T_2	T_3, T_4	T_1, T_4

Jede Übung soll von einem Tutor betreut werden, und jedem Tutor kann höchstens eine Übung zugewiesen werden. Modellieren Sie das Problem als bipartiten Graph und geben Sie ein Matching an, so dass möglichst vielen Übungen ein Tutor zugewiesen wird.

- b) Sei $M \subseteq E$ ein Matching in einem Graph $G = (V, E)$ und sei P ein M -augmentierender Weg. Zeigen Sie, dass die symmetrische Differenz $M \triangle P$ ein Matching in G ist.

Aufgabe 2.3 (10 Punkte)

- a) Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph und sei M ein maximales Matching in G , das heißt für jede Kante $e \in E \setminus M$ gilt $M \cup \{e\}$ ist kein Matching in G . Zeigen Sie, dass $|M| \geq \frac{1}{2} \nu(G)$.
- b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die Aussage aus a) für allgemeine Graphen gilt.

Aufgabe 2.4 (Präsenzübung) Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph mit n Knoten und Kantenlängenfunktion $l : A \rightarrow \mathbb{Z}$. Sei $s \in V$ der Startknoten. Betrachte die Funktionen $d_0, \dots, d_n : V \rightarrow \mathbb{Z}$, die der Algorithmus von Bellman-Ford berechnet. Zeige: Es gilt $d_n = d_{n-1}$ genau dann, wenn alle gerichteten Kreise, die von s aus erreichbar sind, nichtnegative Länge besitzen.

Abgabe: Bis Dienstag, 26.04., 10 Uhr.

Aufgaben 2.1, 2.2 und 2.3 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01). Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.