



Universität zu Köln
 Mathematisches Institut
 Dr. F. von Heymann
 M. Dostert, M.Sc.

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2016

— Aufgabenblatt 3 —

Aufgabe 3.1 (10 Punkte) Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit Bipartition $V = U \cup W$, der die Eigenschaft

$$|\Gamma(X)| \geq |X| \quad \forall X \subseteq U \quad (1)$$

erfüllt. Sei $H = (V', E')$ mit Bipartition $V' = U \cup W'$, wobei $W' \subseteq W$ und $E' \subseteq E$ so gewählt sind, dass H Eigenschaft (1) erfüllt und diesbezüglich die minimale Anzahl von Kanten hat. Zeigen Sie, dass jeder Knoten in W' höchstens einen Nachbarn hat. Benutzen Sie dies um den Satz von Hall (Korollar II.3.4) zu zeigen, ohne den Satz von König zu verwenden.

Aufgabe 3.2 (10 Punkte) Beweisen Sie das Matchingtheorem von König (Satz II.3.2) unter Verwendung der Aussage des Satzes von Hall (Korollar II.3.4).

Aufgabe 3.3 (10 Punkte) Die folgende Tabelle enthält eine fiktive Zuordnung von Veranstaltungen zu den jeweiligen Modulen:

Aufbaumodul I	Aufbaumodul II	Schwerpunktmodul
Analysis	Algebra	Funktionalanalysis
Operations Research	Funktionalanalysis	Zahlentheorie
		Numerik

Ein Studierender hat alle drei Module abzudecken, wobei mit einer Veranstaltung nur ein Modul abgedeckt werden kann. Sei S ein Studierender, der bereits an der Veranstaltung *Funktionalanalysis* erfolgreich teilgenommen hat. Für die restlichen Veranstaltungen hat dieser Studierende folgende Präferenzen (absteigend sortiert):

Numerik, Zahlentheorie, Algebra, Operations Research, Analysis

Finden Sie eine minimale Anzahl von Veranstaltung, die der Studierende S belegen muss, so dass alle Module abgedeckt sind und seine Präferenzen möglichst stark berücksichtigt werden.

Aufgabe 3.4 (Präsenzübung) Sei A eine endliche Menge, $A_1, \dots, A_m \subseteq A$ und $d_1, \dots, d_m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass paarweise disjunkte Mengen D_j mit $D_j \subseteq A_j$ und $|D_j| = d_j$ ($j = 1, \dots, m$) genau dann existieren, wenn für alle $I \subseteq \{1, \dots, m\}$

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \geq \sum_{i \in I} d_i$$

gilt.

Tipp: Betrachten Sie zunächst den Fall $d_1 = \dots = d_m = 1$.

Abgabe: Bis Dienstag, 03.05., 12 Uhr.

Aufgaben 3.1, 3.2 und 3.3 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01). Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.