Einführung in die Mathematik des Operations Research

(Sommersemester 2016)

Homepage: www.mi.uni-koeln.de/opt/or2016

→ Anmeldungen zu den Übungen
(3 Fragen von Blatt 0 beantworten)
(bis morgen 12 Uhr)

→ Aufgabenblätter
(jeweils 4 Aufgaben:
Aufgabe 1,2,3: schriftlich abgeben
Aufgabe 4: Präsenzaufgabe)

Was ist "O.R."? Antwort der Gesellschaft für O.R. e.V.:

- Entwicklung und Einsatz quantitativer Modelle und Methoden zur Entscheidungsunterstützung.
- geprägt durch die Zusammenarbeit von Mathematik, Wirtschaftswissenschaften und Informatik.

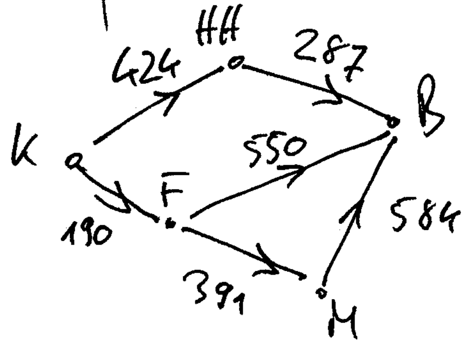
Teil A – Graphen, Netzwerke, Kombinatorische Algorithmen

Sehr häufiges Hilfsmittel in OR: Modellierung von Problemen mit Hilfe von Graphen und Netzwerken.

<u>Hier</u>:
- Bestimmung kürzester Wege
  (Anwendung zB: Navigationsgeräte)
- Bestimmung maximaler Matchings in einem bipartiten Graphen
  (Anwendung zB: Studienberatung)
- Bestimmung maximaler Flüsse in einem Netzwerk
  (Anwendung zB: Transportprobleme)

Kapitel I Kürzeste Wege

<u>Beispiel</u>: Straßennetzwerk

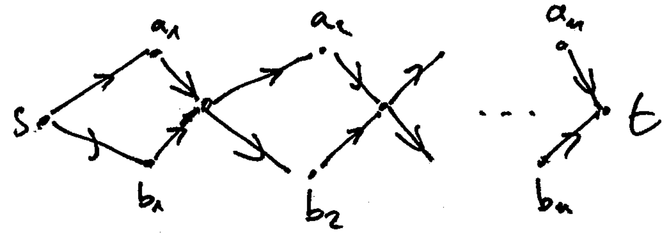


Finde kürzesten Weg von K nach B

<u>Mögliche Wege</u>:	<u>Länge</u>:
$K \to HH \to B$:	711
$K \to F \to B$:	744
$K \to F \to M \to B$:	1165

Ziel: Finde einen kürzesten Weg auf eine effiziente (algorithmische) Weise, die für möglichst viele Netzwerke funktioniert.

Insbesondere: "Alle Möglichkeiten ausprobieren" ist keine solche Weise



$$2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n \text{ mögliche Wege}$$

n	Rechenzeit (mit 10^{-9} s pro Weg)
20	0,001 s
40	18 min
60	36 J
80	38 Mill. Jahre

§1 Grundbegriffe

Def. 1: Ein gerichteter Graph (oder Netzwerk) $D = (V, A)$ ist ein geordnetes Paar, bestehend aus einer endlichen Menge V (Knoten) und einer Menge $A \subseteq \{(v, w) \in V \times V : v \neq w\}$ ((gerichtete) Kanten).

$\longrightarrow$ D beschreibt eine irreflexive Relation auf $V \times V$.

Beispiel 2: $V = \{K, HH, F, M, B\}$

$A = \{(K,HH), (K,F), (F,M), (F,B), (M,B), (HH,B)\}$

Def. 3: a) Eine Kantenfolge P ist ein Tupel der Form

$$P = (v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, a_m, v_m), \text{ wobei}$$

$v_0, \dots, v_m \in V$, $a_1, \dots, a_m \in A$, und $a_i = (v_{i-1}, v_i)$.

v_0 heißt Startknoten, v_m heißt Endknoten.

b) Eine Kantenfolge P heißt v_0-v_m-Weg (oder Weg), falls $|\{v_0, \dots, v_m\}| = m+1$. (D.h. jeder Knoten wird nur einmal „besucht".)

Def. 4: a) Eine Funktion $l: A \to \mathbb{R}$ heißt Kantenlängenfunktion.

b) Die Länge der Kantenfolge P ist

$$l(P) = \sum_{i=1}^{m} l(a_i).$$

c) Für $s, t \in V$ ist der Abstand zwischen s und t definiert als

$$\operatorname{dist}(s,t) = \inf_{P \text{ ist } s\text{-}t\text{-Weg}} l(P).$$

d) Ein s-t-Weg P heißt <u>kürzester s-t-Weg</u>, falls $\ell(P) = \mathrm{dist}(s,t)$.

<u>Bemerkung</u>: Wenn es überhaupt einen s-t-Weg gibt, dann auch einen kürzesten. Dieser ist aber nicht unbedingt eindeutig.

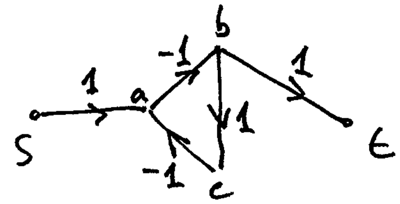
§2 Potentiale

Wie kann man beweisen, dass ein s-t-Weg ein kürzester Weg ist?

<u>Idee</u>: Kürzeste s-t-Kantenfolgen sind kürzeste s-t-Wege.

<u>Problem</u>: Kreise negativer Länge.

<u>Beispiel 1</u>:

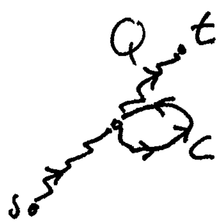


Kürzester s-t-Weg: $s \to a \to b \to t$ (Länge 1)
Kürzeste s-t-Kantenfolge: existiert nicht.

<u>Def. 2</u>: Eine Kantenfolge $P = (v_0, a_1, v_1, \ldots, a_m, v_m)$ heißt <u>(gerichteter) Kreis</u>, falls $v_0 = v_m$ und $|\{v_0, \ldots, v_m\}| = m$.

Satz 3: Sei $D=(V,A)$ ein gerichteter Graph mit Längenfkt. $\ell : A \to \mathbb{R}$. Angenommen alle Kreise in D haben nichtnegative Länge. Seien $s,t \in V$ so dass es eine s-t-Kantenfolge gibt. Dann gibt es eine kürzeste s-t-Kantenfolge, die auch ein Weg ist.

Beweis: Sei P ein kürzester s-t-Weg. Angenommen Q ist eine s-t-Kantenfolge mit $\ell(Q) < \ell(P)$.
Wir können annehmen, dass Q minimale Anzahl von Kanten mit dieser Eigenschaft hat.
Da Q kein Weg ist, enthält Q einen Kreis C.
Nach Voraussetzung ist $\ell(C) \geq 0$.
Sei Q' die Kantenfolge, die man durch Löschen von C aus Q erhält.
Q' ist ebenfalls eine s-t-Kantenf.



mit

$$\ell(Q') = \ell(Q) - \ell(C) \leq \ell(Q) < \ell(P)$$

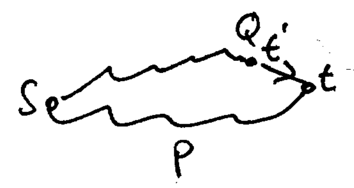
aber weniger Kanten als Q. Widerspruch zur Minimalität von Q. $\square$

Zurück zur Frage, wie man zeigen kann dass ein s-t-Weg ein kürzester s-t-Weg ist.

Zertifikat, dass er nicht kürzester s-t-Weg ist:

Ang. P ist s-t-Weg der Länge $p(t)$, $(t',t) \in A$, und Q ist s-t'-Weg der Länge $p(t')$.

Falls $p(t') + \ell((t',t)) < p(t)$, ist P kein kürzester s-t-Weg.



Def. 4: Eine Funktion $p: V \to \mathbb{R}$ heißt Potential für $D=(V,A)$, $\ell: A \to \mathbb{R}$, falls

$$p(v) - p(u) \leq \ell(a) \text{ für alle } a=(u,v) \in A$$

gilt.

Satz 5: Sei $D=(V,A)$ gerichteter Graph und $\ell: A \to \mathbb{R}$ Kantenlängenfkt. Dann gibt es ein Potential $p: V \to \mathbb{R}$ für D, ℓ genau dann wenn alle ger. Kreise in D nichtnegative Länge haben.

Beweis: "$\Rightarrow$" Sei $p: V \to \mathbb{R}$ Potential für D, ℓ und Sei $C=(v_0, a_1, \dots, a_m, v_m)$ Kreis mit $v_0 = v_m$.

Dann gilt

$$\ell(C) = \sum_{i=1}^{m} \ell(a_i) \geq \sum_{i=1}^{m} \left(p(v_i) - p(v_{i-1}) \right) = 0$$

"$\Leftarrow$" Füge zu D einen neuen Knoten s_0 hinzu, sowie für alle $t \in V$ Kanten (s_0, t), mit $\ell(s_0, t) = 0$.

<u>Beh</u>: $p(t) = \text{dist}(s_0, t)$ ist ein Potential für D, ℓ.

<u>Bew</u>: zu zeigen:

$$\forall a = (u,v) \in A: \quad p(v) - p(u) = \text{dist}(s_0, v) - \text{dist}(s_0, u) \leq \ell(a)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{"} \quad : \quad \text{dist}(s_0, v) \leq \text{dist}(s_0, u) + \ell(a)$$

Betrachte einen kürzesten s_0-u-Weg P. Wenn man an P die Kante a (und v) anfügt, erhält man eine s_0-v-Kantenfolge der Länge $\text{dist}(s_0, u) + \ell(a)$. Da alle Kreise nichtnegative Länge haben, gibt es nach Satz 3 eine kürzeste s_0-v-Kantenfolge, die ein s_0-v-Weg ist, d.h. $\text{dist}(s_0, v) \leq \text{dist}(s_0, u) + \ell(a)$.

$\square$

<u>Bemerkung</u>: Falls $\ell : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, dann ist $p \equiv 0$ immer ein Potential.